20
REFLEXION REFRACCION POLARIZACION

20.1 Introducción

En todas las clases de ondas estudiadas en los capítulos 18 y 19, la velocidad de propagación depende de alguna propiedad física del medio a través del cual la onda se propaga. Por ejemplo, la velocidad de las ondas elásticas depende del módulo de elasticidad y de la densidad del medio. La velocidad de las ondas electromagnéticas depende de la permitividad y de la permeabilidad de la sustancia a través de la cual se propagan.

El hecho de que la velocidad de propagación de una onda dependa de las propiedades del medio da lugar a los fenómenos de *reflexión* y de *refracción*, que ocurren cuando una onda cruza la superficie de separación de dos medios en los cuales la onda se propaga con diferentes velocidades. La *onda reflejada* es una nueva onda que se propaga en el medio en el cual la onda original se estaba propagando. La *onda refractada* es la onda que se transmite al segundo medio. La energía de la onda incidente se divide entre la onda reflejada y la refractada. En muchos casos la onda reflejada recibe mayor energía, como sucede en los espejos. En otros, la onda refractada transporta la mayor parte de la energía. Cuando una onda transversal está polarizada la polarización queda generalmente afectada por la reflexión y por la refracción; por consiguiente también trataremos la polarización en este capítulo.

20.2 Principio de Huygens

La propagación de una onda está descrita por las ecuaciones del campo al cual la onda corresponde. Consideramos esto con detenimiento en los capítulos 18-19. Por lo tanto, si conocemos la fuente productora de una onda, podemos, en principio, seguir su propagación de una región a otra, tomando en consideración en nuestros cálculos los cambios en las propiedades del medio. Es también posible, sin embargo, calcular la amplitud de una onda en un punto particular del espacio sin hacer referencia a las fuentes. Alrededor de 1680 el físico danés Christian Huygens (1629-1695) propuso un mecanismo simple para trazar la propagación de ondas. Su construcción es aplicable a ondas mecánicas o elásticas en un medio material.

Recordemos que una *superficie de onda* o un *frente de onda* es una superficie que pasa por todos los puntos del medio alcanzados por el movimiento ondulatorio al mismo instante. Por consiguiente, la perturbación en todos los puntos de una superficie de onda tiene la misma fase. Por ejemplo, para una onda plana la perturbación se expresa por $f(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} - vt)$, y una superficie de onda la forman todos los puntos en los cuales la fase $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} - vt$ tiene el mismo valor a un instante dado. Luego, la superficie de onda está dada por la ecuación

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} - vt = \text{const},$$

la cual, para un dato t, corresponde a un plano perpendicular al versor $\boldsymbol{u}$ (recordar el ejemplo 3.11). Análogamente, para ondas esféricas, las superficies de onda están dadas por $r - vt = \text{const}$, la cual, para un dado t corresponde a esferas.

Huygens visualizó un método para pasar de una superficie de onda a otra. Consideremos una superficie de onda S (fig. 20-1). Cuando el movimiento ondulatorio alcanza esta superficie, cada partícula a, b, c, ... sobre la superficie se convierte en una fuente secundaria de ondas, que emite *ondas secundarias* (indicadas por pequeñas semicircunferencias), que alcanzan la próxima capa de partículas del medio. Entonces estas partículas se ponen en movimiento, formando la subsiguiente superficie de onda S' .... La superficie S' es tangente a todas las ondas secundarias. El proceso se repite, resultando la propagación de la onda a través del medio. Esta representación pictórica de la propagación de una onda parece muy razonable cuando la onda resulta de las vibraciones mecánicas de los átomos o moléculas de un cuerpo, es decir, es elástica.

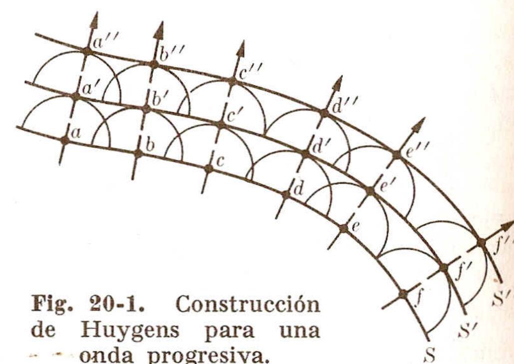


Fig. 20-1. Construcción de Huygens para una onda progresiva.

Sin embargo, esta representación no tiene significado físico en casos como, por ejemplo, la propagación en el vacío de una onda electromagnética, donde no hay partículas que vibren. Por lo tanto, la construcción de Huygens, aunque razonable al aplicarse a las ondas mecánicas que se propagan en la materia, requirió una revisión al saberse que en la naturaleza existen otras ondas de clase diferente. Esta revisión fue llevada a efecto al final del último siglo por Kirchhoff, quien reemplazó la construcción intuitiva de Huygens por un tratamiento más matemático. Los cálculos de Kirchhoff son tan complicados que no los reproduciremos aquí. Su resultado final es, sin embargo, relativamente simple, como se verá en los párrafos que siguen.

El movimiento ondulatorio está regido por la ecuación general de onda (18.48). Esto es,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \tag{20.1}$$

donde ξ puede ser el desplazamiento de los átomos de una sustancia en el caso de una onda elástica, el campo eléctrico o magnético en el caso de una onda electromagnética, y así sucesivamente. Comprender la propagación de una onda en un medio cualquiera consiste fundamentalmente en obtener una solución $\xi(\boldsymbol{r}, t)$ de esta ecuación diferencial. La solución de la ec. (20.1) depende de las condiciones físicas del problema que se deben satisfacer; esto es, de la posición y naturaleza de las fuentes, de las superficies físicas de discontinuidad, etc. Estas condiciones son llamadas por los matemáticos *condiciones de contorno*. La teoría de las ecuaciones diferenciales establece que bajo condiciones especiales podemos hallar la solución de una ecuación tal como la ec. (20.1) si conocemos los valores de la función $\xi(\boldsymbol{r}, t)$ sobre una superficie cerrada S (fig. 20-2). Para ser más concretos, supongamos que queremos evaluar el movimiento ondulatorio en un punto P. Si conocemos las fuentes σ_1, σ_2, σ_3, ..., podemos sumar todas sus con-

tribuciones en el punto P y obtener el movimiento ondulatorio resultante. Supongamos ahora que, en su lugar, conocemos el valor de ξ en todos los puntos de una superficie arbitraria, pero cerrada, S. En este caso también podemos obtener la onda en P, aun cuando ignoremos la distribución de las fuentes. Matemáticamente, se puede expresar esto del siguiente modo. Sea $f(Q, t)$ la función que representa la onda en cada punto Q de la superficie S al instante t. Supongamos que r representa la distancia entre el elemento de superficie dS alrededor de Q y el punto P. La perturbación en P al instante t se puede expresar por una integral de la forma*

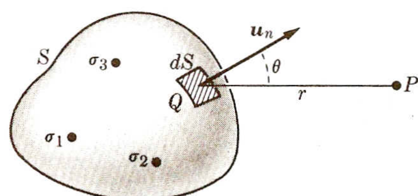


Fig. 20-2. La onda en P se puede calcular si se conoce la onda en todos los puntos de la superficie S.

$$\xi_P(t) = \oint_S g(\theta) \frac{f(r - vt)}{r} dS, \qquad (20.2)$$

donde la integral se extiende a toda la superficie S. Esta integral tiene por lo demás una interpretación física simple. El factor $(1/r)f(r - vt)$ representa una onda esférica emitida por la superficie elemental dS al instante $t - r/v$ y que llega a P al instante t, de modo que r/v es el tiempo de propagación desde dS hasta P. El factor $g(\theta)$ es un factor direccional que indica que las ondas emitidas por dS no tienen la misma amplitud en todas las direcciones. Cuando dS es perpendicular a la dirección de propagación, $g(\theta)$ toma la forma

$$g(\theta) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta),$$

de modo que la amplitud máxima ($g = 1$) corresponde a $\theta = 0$, o propagación hacia adelante, y la amplitud mínima ($g = 0$) a $\theta = \pi$, o propagación hacia atrás. Concluimos entonces que *podemos obtener la perturbación en el punto P al instante t si suponemos que cada elemento de superficie dS de la superficie cerrada S actúa como una fuente secundaria de ondas.* Este es esencialmente el enunciado de Huygens, pero en una perspectiva diferente, sin referencia a un modelo mecánico.

Tendremos ocasión de usar el principio de Huygens, reformulado por Kirchhoff, en muchas de las discusiones que siguen sobre la propagación de ondas, especialmente cuando tratemos la difracción y la difusión.

20.3 Teorema de Malus

Otro instrumento importante para seguir la propagación de una onda, a través de un medio, es el teorema de Malus. Refiriéndonos de nuevo a la fig. 20-1, observamos que podemos trazar una serie de líneas perpendiculares a las sucesivas

* La expresión real es algo más complicada; pero la ec. (20.2) conviene a nuestros fines y suministra una adecuada aproximación, aplicable al tipo de problemas discutidos en este libro.

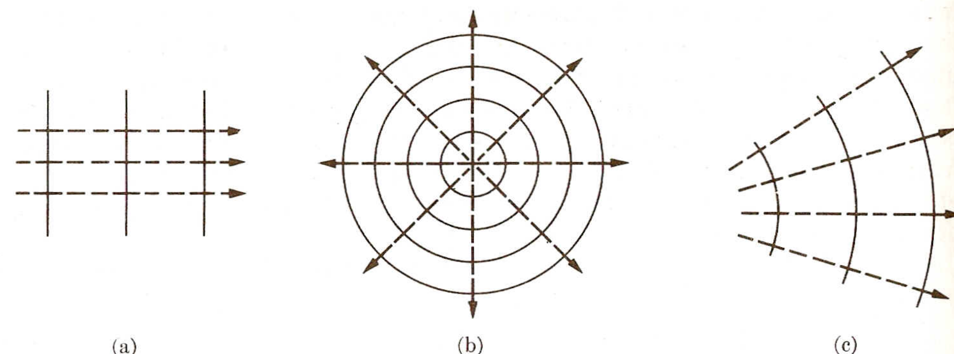


Fig. 20-3. Ondas planas, ondas esféricas y ondas de forma arbitraria.

superficies de onda (indicadas con líneas de trazos con flechas). Estas líneas se llaman *rayos* y corresponden a líneas de propagación de la onda. Debemos observar que la relación entre rayos y superficies de ondas es similar a la relación entre líneas de fuerza y superficies equipotenciales. Puntos de diferentes superficies de onda unidos por un rayo dado, tal como a, a', a'' ó b, b', b'' de la fig. 20-1, se llaman *puntos correspondientes*. Evidentemente el tiempo requerido para que la onda vaya desde S a S'' debe ser el mismo cualquiera sea el rayo según el cual se mida. Podemos de este modo establecer que

> *el tiempo que separa puntos correspondientes de dos superficies de onda es el mismo para todos los pares de puntos correspondientes.*

De aquí concluimos que las distancias aa'', bb'', cc'', etc., deben depender de la velocidad del movimiento ondulatorio en cada punto. En un medio isótropo y homogéneo, donde la velocidad es la misma en todos los puntos y en todas las direcciones, la separación entre dos superficies de onda debe ser la misma para todos los puntos correspondientes. Otro hecho importante que debemos aceptar es que en un medio isótropo homogéneo los rayos deben ser líneas rectas, porque la simetría sugiere que no hay razón para que éstos se desvíen hacia un lado u otro. Esto lo hemos visto ya con ondas planas y esféricas; se ilustra en las partes (a) y (b) de la fig. 20-3. Por lo tanto, en el caso general la familia de superficies de onda debe tener un conjunto común de normales, como se muestra en la fig. 20-3(c), y deben estar igualmente espaciadas a lo largo de estas normales.

Consideremos ahora el caso de una onda que se propaga a través de una sucesión de medios isótropos homogéneos. En el cruce de cada superficie de separación

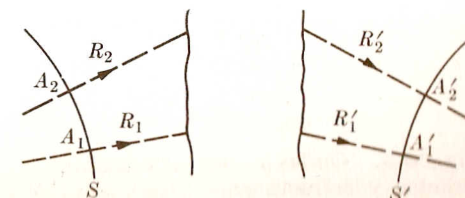


Fig. 20-4. Rayos correspondientes en ondas entrantes y salientes.

de dos medios adyacentes, la dirección de propagación puede cambiar (esto es, los rayos pueden cambiar de dirección), pero mientras esté propagándose en un medio dado, estos rayos seguirán siendo líneas rectas perpendiculares a las superficies de onda. Sea S (fig. 20-4) una superficie de onda en el primer medio. Entonces podemos trazar dos rayos, R_1 y R_2, perpendiculares a S. Las sucesivas superficies de onda en ese medio deben ser perpendiculares a R_1 y R_2. Si después que el movimiento ondulatorio ha pasado a través de todos los medios, observamos otra superficie de onda S', encontramos que los rayos R_1 y R_2 se han transformado en los rayos R_1' y R_2', que son también perpendiculares a S'. En otras palabras,

la relación de ortogonalidad entre rayos y superficies de onda se conserva a través de todo el proceso de la propagación de una onda.

Este teorema supone además que el tiempo requerido para que la onda se propague desde A_1 hasta A_1' (que son puntos correspondientes) debe ser el mismo que el tiempo requerido para ir desde A_2 hasta A_2' (que también son puntos correspondientes).

20.4 Reflexión y refracción de ondas planas

Consideremos una onda plana que se propaga en el medio (1) en la dirección del versor $\boldsymbol{u}_i$ (fig. 20-5). Los experimentos indican que, cuando la onda alcanza la superficie plana AB que separa el medio (1) del medio (2), se transmite una onda al segundo medio y otra regresa al medio (1). Estas son las ondas *refractadas* y *reflejadas*, respectivamente. Cuando el ángulo de incidencia es oblicuo, las ondas refractadas se propagan en la dirección indicada por el versor $\boldsymbol{u}_r$, diferente de $\boldsymbol{u}_i$, y la reflejada se propaga en la dirección que indica el versor $\boldsymbol{u}_r'$ simétrico de $\boldsymbol{u}_i$ con respecto a la superficie. La fig. 20-6 indica la correspondiente situación para los rayos. Los ángulos θ_i, θ_r y θ_r', se llaman ángulos de incidencia, refracción y reflexión, respectivamente. Las direcciones de los tres versores $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_r$ y $\boldsymbol{u}_r'$ están relacionadas por las siguientes leyes experimentales:

(1) *Las direcciones de incidencia, refracción y reflexión están en un mismo plano*, que es normal a la superficie de separación y por lo tanto contiene la normal N a la superficie.

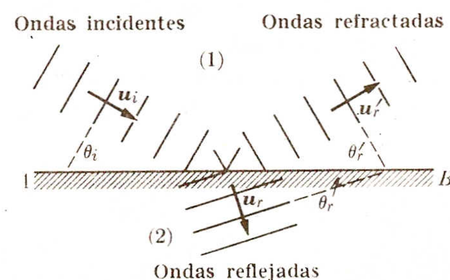


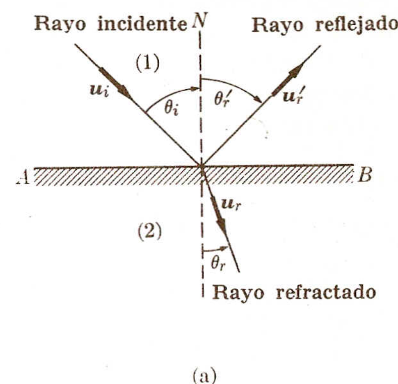
Fig. 20-5. Ondas planas incidentes, reflejadas y refractadas.

(2) *El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.* Esto es,

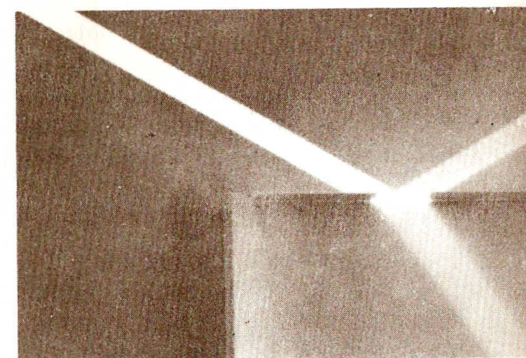
$$\theta_i = \theta_r'. \tag{20.3}$$

(3) El cociente entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es constante. Esto se denomina *ley de Snell* y se expresa por

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_r} = n_{21}. \tag{20.4}$$



(a)



(b)

Fig. 20-6. (a) Rayo incidente, reflejado y refractado. (b) Un haz de luz reflejado y refractado por un bloque de vidrio. (De: *Physics*, D.C. Heath, Boston, 1960.)

La constante n_{21} se llama índice de refracción del medio (2) respecto al medio (1). El valor numérico depende de la naturaleza de la onda y de las propiedades de los medios.

Estas leyes siguen siendo válidas aún cuando la superficie de onda y la superficie de separación no sean planas, porque en cada punto hay una sección limitada de cada una de las dos superficies que se puede considerar plana y los rayos en aquel punto se comportan de conformidad con las ecuaciones (20.3) y (20.4).

Las tres leyes pueden verificarse experimentalmente sin gran dificultad. Se pueden probar teóricamente usando los conceptos básicos de la propagación de ondas y en particular el teorema de Malus. Por ejemplo, la primera ley se puede justificar basándose solamente en consideraciones de simetría, ya que el rayo incidente y la normal N determinan un plano, y no hay a priori razón para que los rayos refractados y los reflejados se desvíen de este plano. Para probar la segunda y tercera leyes, consideremos dos rayos incidentes R_1 y R_2 (fig. 20-7), paralelos entre sí, ya que las ondas incidentes son planas. El rayo R_1 toca la superficie de separación en el punto A y R_2 en B'. Como la situación geométrica para A y B' es la misma, concluimos que los rayos refractados R_1' y R_2', así como los rayos reflejados R_1'' y R_2'', son también paralelos. Como los rayos R_1 y R_2 son arbitrarios, tenemos entonces que las ondas refractadas y reflejadas son también planas ya que deben ser perpendiculares a un conjunto correspondiente de rayos paralelos, como lo requiere el teorema de Malus.

Consideremos las siguientes superficies de onda: AB en la onda incidente, $A'B'$ en la onda refractada, y $A''B''$ en la onda reflejada. Está implícito en el

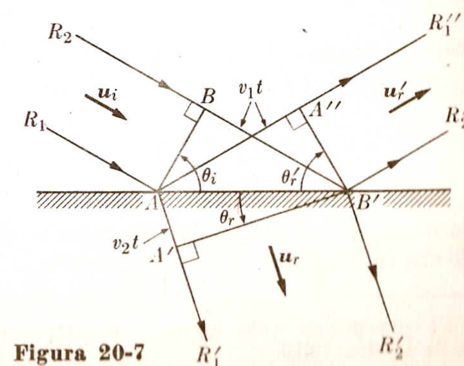


Figura 20-7

teorema de Malus que los rayos entre puntos correspondientes de superficies de onda deben tardar el mismo tiempo en cubrir la distancia entre ellos. Llamemos t el tiempo que toma la onda incidente en ir desde B hasta B' según el rayo R_2 con velocidad v_1. En el mismo tiempo la onda refractada se ha movido según el rayo R_1' desde A hasta A'' con velocidad v_1. Entonces:

$$BB' = v_1 t, \qquad AA' = v_2 t, \qquad AA'' = v_1 t,$$

y de la geometría de la figura,

$$\operatorname{sen}\theta_i = \frac{BB'}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'},$$

$$\operatorname{sen}\theta_r = \frac{AA'}{AB'} = \frac{v_2 t}{AB'},$$

$$\operatorname{sen}\theta_r' = \frac{AA''}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'}.$$

De la comparación de la primera y la tercera relaciones, se obtiene: $\operatorname{sen}\theta_i = \operatorname{sen}\theta_r'$, ó $\theta_i = \theta_r'$, que es la ley de la reflexión, ec.(20.3). Dividiendo la primera relación entre la segunda, se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_r} = \frac{v_1}{v_2},$$

que expresa la ley de Snell, ec. (20.4), ya que el cociente v_1/v_2 entre las dos velocidades de propagación es constante. Comparando esta ecuación con la ec. (20.4), vemos que el índice de refracción relativo de dos sustancias es igual al cociente entre las velocidades de propagación de la onda en las sustancias, o

$$n_{21} = v_1/v_2. \tag{20.5}$$

Tomemos un medio particular de referencia o patrón y designemos por c la velocidad de propagación de la onda en ese medio. El *índice absoluto de refracción* de cualquier otro medio se define como

$$n = c/v. \tag{20.6}$$

Para las ondas electromagnéticas,* el medio de referencia es el vacío y entonces $c \approx 3 \times 10^8$ m s^{-1}. Luego, para dos sustancias,

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{c}{v_2} \times \frac{v_1}{c} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}, \tag{20.7}$$

de modo que el índice de refracción relativo de dos sustancias es igual al cociente de sus índices absolutos de refracción. Usando la relación (20.7), podemos escribir

* El concepto de índice absoluto de refracción para las ondas electromagnéticas se introdujo en la sección 19.13.

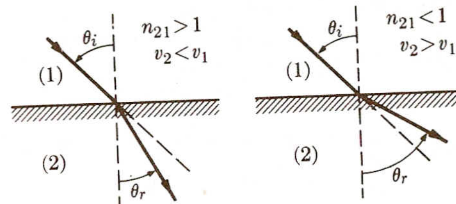


Fig. 20-8. Rayos refractados para $n_{21} > 1$ y $n_{21} < 1$.

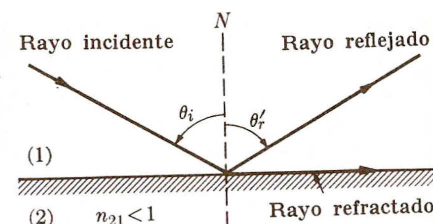


Fig. 20-9. La reflexión total ocurre cuando $n_{21} < 1$ y θ_i es mayor que el ángulo crítico λ.

la ley de Snell, ec. (20.4), en la forma más simétrica

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_r. \tag{20.8}$$

Obsérvese que si $v_2 \lesseqgtr v_1$, entonces $n_2 \gtrless n_1$, con lo cual resulta $\theta_i \gtreqless \theta_r$, como se indica en la fig. 20-8. En el segundo caso, esto es, $n_{21} < 1$, puede dar lugar a una situación especial. Cuando

$$\operatorname{sen}\theta_i = n_{21}, \tag{20.9}$$

obtenemos de la ec. (20.4) que $\operatorname{sen}\theta_r = 1$ ó $\theta_r = \pi/2$ lo cual indica que el rayo refractado es paralelo a la superficie. El ángulo θ_i dado por la ec. (20.9) se llama *ángulo crítico* y se designa con λ. La situación geométrica se ilustra en la fig. 20-9. Si $n_{21} < 1$, tenemos $\theta_i > \lambda$ ó $\operatorname{sen}\theta_i > n_{21}$, de lo cual se deduce que $\operatorname{sen}\theta_r > 1$, lo que es imposible. Por consiguiente, en este caso no hay rayo refractado y decimos que se produce *reflexión total*. Esta situación puede ocurrir, por ejemplo, cuando la luz pasa del vidrio al aire. Estrictamente hablando, como se muestra en la fig. 20-9, existe una onda que se propaga en el segundo medio paralelamente a la superficie, pero la amplitud de ésta decrece muy rápidamente a medida que se interna en el segundo medio, quedando confinada a una delgada capa a lo largo de la superficie.

EJEMPLO 20.1. Verificar que cuando una onda pasa a través de un medio limitado por caras planas paralelas, la dirección de propagación del rayo emergente es paralela a la del rayo incidente. Calcular el desplazamiento lateral de los rayos.

Solución: Consideremos una placa de espesor a y un rayo AB (fig. 20-10) que incide con un ángulo θ_i. Haremos caso omiso del rayo reflejado. El ángulo de refracción es θ_r, correspondiente al rayo refractado BC. Usando la relación (20.8), tenemos que

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_r.$$

En el punto C la refracción es del medio (2) al medio (1), de modo que la ec. (20.8) da

$$n_2 \operatorname{sen}\theta_i' = n_1 \operatorname{sen}\theta_r'.$$

Además de la geometría de la fig. 20-10 deducimos que $\theta_i' = \theta_r$. Por lo tanto, multiplicando ambas relaciones, obtenemos $\operatorname{sen}\theta_i = \operatorname{sen}\theta_r'$ ó $\theta_i = \theta_r'$, lo cual prueba que el rayo emergente CD es paralelo al incidente AB, resultado que era de esperar

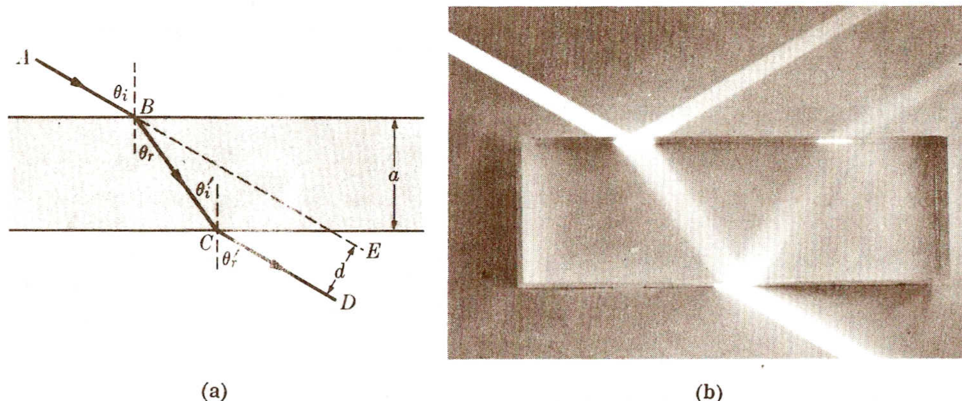


Fig. 20-10. Propagación de un rayo a través de una placa de caras paralelas. En (b) se muestra la fotografía del desplazamiento de un haz de luz. (De: *Physics*, D. C. Heath, Boston, 1960.)

de la geometría del problema. Dejamos que el estudiante verifique que el desplazamiento lateral del rayo es

$$d = a\,\frac{\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_r)}{\cos\theta_r}.$$

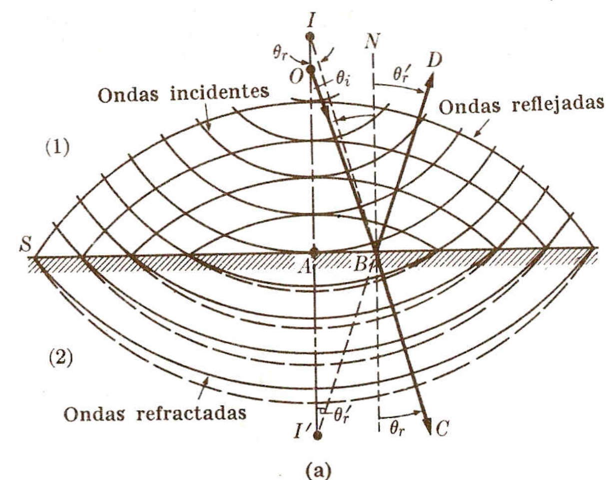
También se puede comprobar fácilmente que si se tienen varias placas paralelas de materiales diferentes, los rayos incidente y emergente continúan siendo paralelos.

20.5 *Reflexión y refracción de ondas esféricas*

Un segundo problema importante es la reflexión y refracción de ondas *esféricas* en una superficie plana. Consideremos las ondas esféricas generadas en la fuente puntual O e incidentes sobre una superficie plana S. Se producen entonces dos conjuntos nuevos de ondas: las reflejadas y las refractadas o transmitidas, como se muestra en la fig. 20-11. A fin de trazar la forma de los frentes de onda reflejados y refractados, sería necesario dibujar muchos rayos reflejados y refractados. Las correspondientes superficies de onda reflejadas y refractadas son normales a los rayos. En la fig. 20-11, se ha dibujado en B un conjunto de estos rayos, suponiendo $n_{21} > 1$. De acuerdo con las leyes (2) y (3) para la reflexión y la refracción, tenemos

$$\theta_i = \theta_r', \quad \operatorname{sen}\theta_i/\operatorname{sen}\theta_r = n_{21}.$$

El rayo reflejado BD, cuando se prolonga en el medio (2), intercepta a la normal AO en el punto I'. Puesto que los triángulos OAB e $I'AB$ son rectángulos y los ángulos en O e I' son iguales, se deduce que $AO = AI'$. Como B es un punto arbitrario, concluimos que *todos los rayos reflejados pasan por* el punto I', *simétrico*



(b)

Fig. 20-11. Ondas esféricas: incidente, reflejada y refractada. En (b) la fotografía muestra las ondas superficiales incidentes y reflejadas en un medio líquido. (De: *Physics*, D. C. Heath, Boston, 1960.)

de O respecto a la superficie plana. Este punto se llama la *imagen* de O por reflexión.

En consecuencia, *cuando las ondas esféricas inciden sobre una superficie plana, las ondas reflejadas son esféricas y simétricas con respecto a las incidentes.* Esta simetría era de esperarse en vista de que las ondas reflejadas se propagan con la misma velocidad que las ondas incidentes, de tal modo que se mantienen simétricas respecto a la superficie reflectora.

Respecto al rayo refractado BC, vemos que cuando lo extendemos en el medio (1) intercepta a la normal OA en el punto I tal que $\operatorname{tg} \theta_r = AB/AI$. También $\operatorname{tg} \theta_i = AB/AO$. Por lo tanto

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_i}{\operatorname{tg} \theta_r} = \frac{AI}{AO}$$

o sea

$$AI = AO \frac{\operatorname{tg} \theta_i}{\operatorname{tg} \theta_r}. \tag{20.10}$$

Ahora bien, la ley de refracción de Snell requiere que sen θ_i/sen θ_r sea constante e igual a n_{21}. Pero entonces $\operatorname{tg} \theta_i/\operatorname{tg} \theta_r$ no puede ser constante. Por consiguiente los rayos refractados no pasan todos por el mismo punto. Concluimos entonces que *cuando las ondas esféricas inciden sobre una superficie plana, las ondas refractadas no son esféricas.*

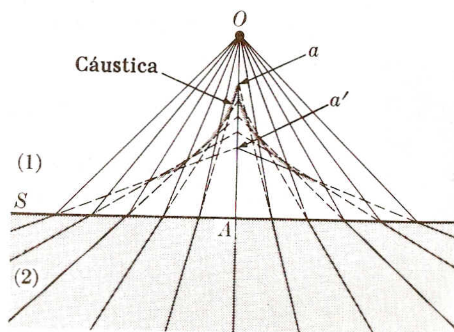


Fig. 20-12. Refracción de rayos procedentes de una fuente puntual. Los rayos refractados, al prolongarse hacia atrás, no se interceptan.

Como los rayos refractados no pasan todos por el mismo punto, no forman una imagen puntual de O como lo hacen los rayos reflejados. Los rayos refractados a uno y a otro lado de la normal OA se interceptan en puntos situados a lo largo de ella, formando una superficie cónica llamada *cáustica*, ilustrada en la fig. 20-12. Esto puede observarse sin dificultad en el caso de la refracción de ondas luminosas. El punto a de intersección de los rayos menos inclinados, puede encontrarse muy fácilmente, porque para ellos los ángulos θ_i y θ_r de la fig. 20-11 son muy pequeños y podemos reemplazar las tangentes por senos en la ec. (20.10), con lo cual resulta

$$AI \approx AO \frac{\operatorname{sen} \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_r} = n_{21} AO. \tag{20.11}$$

20.6 Más acerca de las leyes de la reflexión y de la refracción

Hemos establecido las leyes de la reflexión y de la refracción usando razonamientos más o menos geométricos basados en el teorema de Malus. Pero es posible también discutir estas leyes en una forma más analítica. Supongamos que una onda incidente esté descrita por una ecuación de la forma (18.46). Esto es

$$\xi_i = \xi_{0i} \operatorname{sen} (\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t). \tag{20.12}$$

Las ondas refractadas y reflejadas serán, respectivamente,

$$\xi_r = \xi_{0r} \operatorname{sen} (\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \tag{20.13}$$

y

$$\xi_r' = \xi_{0r}' \operatorname{sen} (\boldsymbol{k}_r' \cdot \boldsymbol{r} - \omega t). \tag{20.14}$$

Obsérvese que hemos usado la misma ω de la onda incidente para las ondas reflejadas y refractadas porque es un hecho experimental que la frecuencia del movimiento ondulatorio no cambia en la reflexión o refracción.

La propiedad física adscrita a ξ (un desplazamiento, una presión, o un campo eléctrico o magnético) es tal que su valor en la superficie de separación de dos medios debe ser el mismo cualquiera sea el lado en que la calculemos. (En el caso de una onda electromagnética, la relación entre las componentes del campo eléctrico y del campo magnético puede ser de naturaleza algo diferente. Pero continúa siendo una relación lineal que involucra los campos a ambos lados de la superficie.) Ahora bien, en el medio (1) tenemos las ondas incidente y reflejada, que produce la perturbación resultante $\xi_i + \xi_r'$, y en el medio (2) tenemos sólo la onda refractada, ξ_r. Entonces en la superficie de separación

$$\xi_i + \xi_r' = \xi_r. \tag{20.15}$$

A fin de que esta ecuación sea satisfecha en todos los puntos de la superficie de separación al mismo instante, es necesario que las fases en las ecs. (20.12), (20.13) y (20.14) sean idénticas, esto es,

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t = \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t = \boldsymbol{k}_r' \cdot \boldsymbol{r} - \omega t \tag{20.16}$$

para puntos $\boldsymbol{r}$ sobre la superficie. Después de cancelar el término común ωt, la ec. (20.16), se reduce a

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r' \cdot \boldsymbol{r}. \tag{20.17}$$

Ahora podemos escoger nuestros ejes XYZ, como se indica en la fig. 20-13, de modo que la superficie de separación coincida con el plano XZ y la dirección de incidencia esté en el plano XY. Entonces, como $\boldsymbol{r}$ debe estar en el plano XZ, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}_x x + \boldsymbol{u}_z z$. Análogamente, $\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{u}_x k_{ix} + \boldsymbol{u}_y k_{iy}$, y como no sabemos si $\boldsymbol{k}_r$ y $\boldsymbol{k}_r'$, están también en el mismo plano, debemos escribir $\boldsymbol{k}_r = \boldsymbol{u}_x k_{rx} + \boldsymbol{u}_y k_{ry} + \boldsymbol{u}_z k_{rz}$ y $\boldsymbol{k}_r' = \boldsymbol{u}_x k_{rx}' + \boldsymbol{u}_y k_{ry}' + \boldsymbol{u}_z k_{rz}'$. Sustituyendo en la ec. (20.17), usando la expresión (3.20) para el producto escalar, obtenemos

$$k_{ix} x = k_{rx} x + k_{rz} z = k_{rx}' x + k_{rz}' z.$$

Pero esta relación debe ser válida para todos los puntos del plano XZ; por lo tanto

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{rx}' \quad \text{y} \quad k_{rz} = k_{rz}' = 0. \tag{20.18}$$

El segundo grupo de ecuaciones indica que los vectores $\boldsymbol{k}_r$ y $\boldsymbol{k}_r'$ no tienen componentes según el eje Z, de modo que están también en el plano XY y los rayos

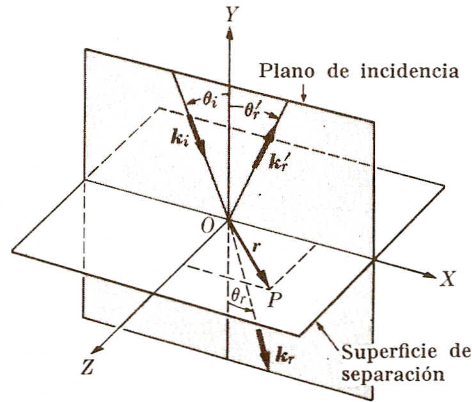


Figura 20-13

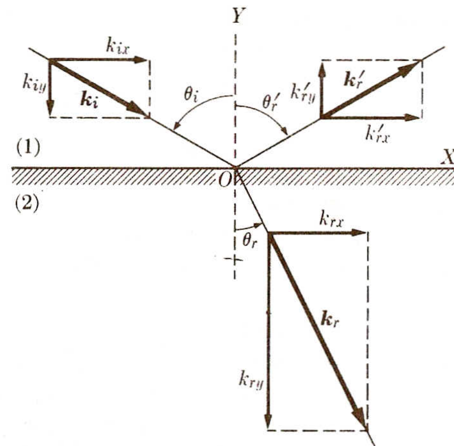


Fig. 20-14. Vectores de propagación en las ondas incidente, reflejada y refractada.

incidente, reflejado y refractado están en el mismo plano; ésta es la ley (1) mencionada anteriormente.

Vemos a continuación que, según la fig. 20-14, $k_{ix} = k_i \operatorname{sen} \theta_i$, $k_{rx} = k_r \operatorname{sen} \theta_r$ y $k'_{rx} = k'_r \operatorname{sen} \theta'_r$. Y de la ec. (18.6), se deduce $k_i = k'_r = \omega/v_1$ y $k_r = \omega/v_2$. Usando todas estas relaciones en el primer grupo de ecs. (20.18), obtenemos, después de eliminar el factor común ω,

$$\frac{1}{v_1} \operatorname{sen} \theta_i = \frac{1}{v_2} \operatorname{sen} \theta_r = \frac{1}{v_1} \operatorname{sen} \theta'_r.$$

De estas relaciones deducimos que $\operatorname{sen} \theta_i = \operatorname{sen} \theta'_r$ ó $\theta_i = \theta'_r$ y $\operatorname{sen} \theta_i/\operatorname{sen} \theta_r = v_1/v_2 = n_{21}$. De este modo, llegamos en forma más analítica a las leyes (2) y (3) de la reflexión y la refracción.

Cuando se satisface la ec. (20.16), la ec. (20.15) se reduce a

$$\xi_{0i} + \xi'_{0r} = \xi_{0r}, \tag{20.19}$$

que es una relación entre las amplitudes de las tres ondas. Ahora bien, si sólo se satisface la ec. (20.15), o su equivalente, la ec. (20.19), no tenemos suficiente información para determinar la amplitud de las ondas reflejada y refractada. Sin embargo, debido a la naturaleza del problema se requiere usualmente otra condición de contorno tal como la continuidad de las tensiones o de las presiones a través de la superficie de separación en el caso de ondas elásticas, o la continuidad de ciertas componentes de los campos eléctrico y magnético en el caso de ondas electromagnéticas. Por consiguiente existe una segunda condición (o condición de contorno) que involucra las amplitudes ξ_{0i}, ξ_{0r} y ξ'_{0r}. Si usamos las dos condiciones de contorno, podemos determinar las amplitudes ξ_{0r} y ξ'_{0r} en función de ξ_{0i}. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

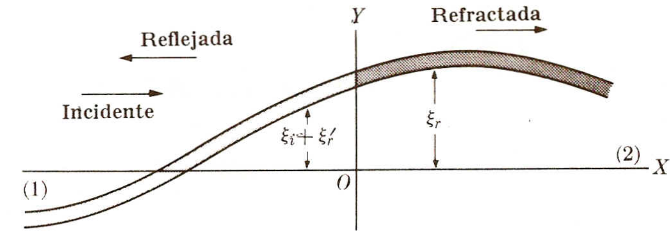


Fig. 20-15. Ondas transversales en dos cuerdas unidas de diferentes densidades.

EJEMPLO 20.2. Estudiar la reflexión y la transmisión de ondas transversales en el punto de unión de dos cuerdas de materiales diferentes. Las cuerdas están sometidas a una tensión T.

Solución: Supongamos que tenemos dos cuerdas (1) y (2) (fig. 20-15), unidas en un punto; este punto será nuestro origen de coordenadas. Por conveniencia matemática, en este ejemplo usaremos para la forma de las ondas la alternativa dada en la ec. (18.10). Existe una onda incidente que viene de la izquierda y que tiene la forma

$$\xi_i = \xi_{0i} \operatorname{sen} (\omega t - k_1 x).$$

En el punto de discontinuidad se produce una onda refractada o transmitida que se propaga a lo largo de la cuerda (2),

$$\xi_r = \xi_{0r} \operatorname{sen} (\omega t - k_2 x),$$

y una onda reflejada que regresa a la cuerda (1),

$$\xi'_r = \xi'_{0r} \operatorname{sen} (\omega t + k_1 x).$$

Obsérvese que usamos k_1 para las ondas incidente y reflejada porque se propagan en el mismo medio: cuerda (1). El desplazamiento vertical en cualquier punto de la cuerda (1) es $\xi = \xi_i + \xi'_r$. En la cuerda (2) el desplazamiento vertical es $\xi = \xi_r$. El punto O, donde las cuerdas se unen, corresponde a $x = 0$. En este punto debemos tener $\xi_i + \xi'_r = \xi_r$, en conformidad con la ec. (20.15), que se convierte en

$$\xi_{0i} \operatorname{sen} \omega t + \xi'_{0r} \operatorname{sen} \omega t = \xi_{0r} \operatorname{sen} \omega t$$

o sea

$$\xi_{0i} + \xi'_{0r} = \xi_{0r}, \tag{20.20}$$

que es una condición entre las amplitudes similar a la ec. (20.19). De acuerdo con la discusión hecha en la sección 18.7, la fuerza vertical en cualquier punto de la cuerda (1) es

$$F_y = T \operatorname{sen} \alpha \approx T \operatorname{tg} \alpha = T \frac{\partial \xi}{\partial x} = T\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi'_r}{\partial x}\right),$$

ya que α es pequeño y $\operatorname{sen} \alpha$ es prácticamente igual a $\operatorname{tg} \alpha$. Entonces:

$$F_y = Tk_1[-\xi_{0i} \cos (\omega t - k_1 x) + \xi'_{0r} \cos (\omega t + k_1 x)].$$

Análogamente, la fuerza vertical en cualquier punto de la cuerda (2) es

$$F_y = T \frac{\partial \xi_r}{\partial x} = -Tk_2 \xi_{0r} \cos (\omega t - k_2 x).$$

Ahora bien, en el punto de unión la fuerza vertical debe ser la misma, sea que la calculemos usando F_y para la cuerda (1) o para la cuerda (2). Haciendo $x = 0$ en

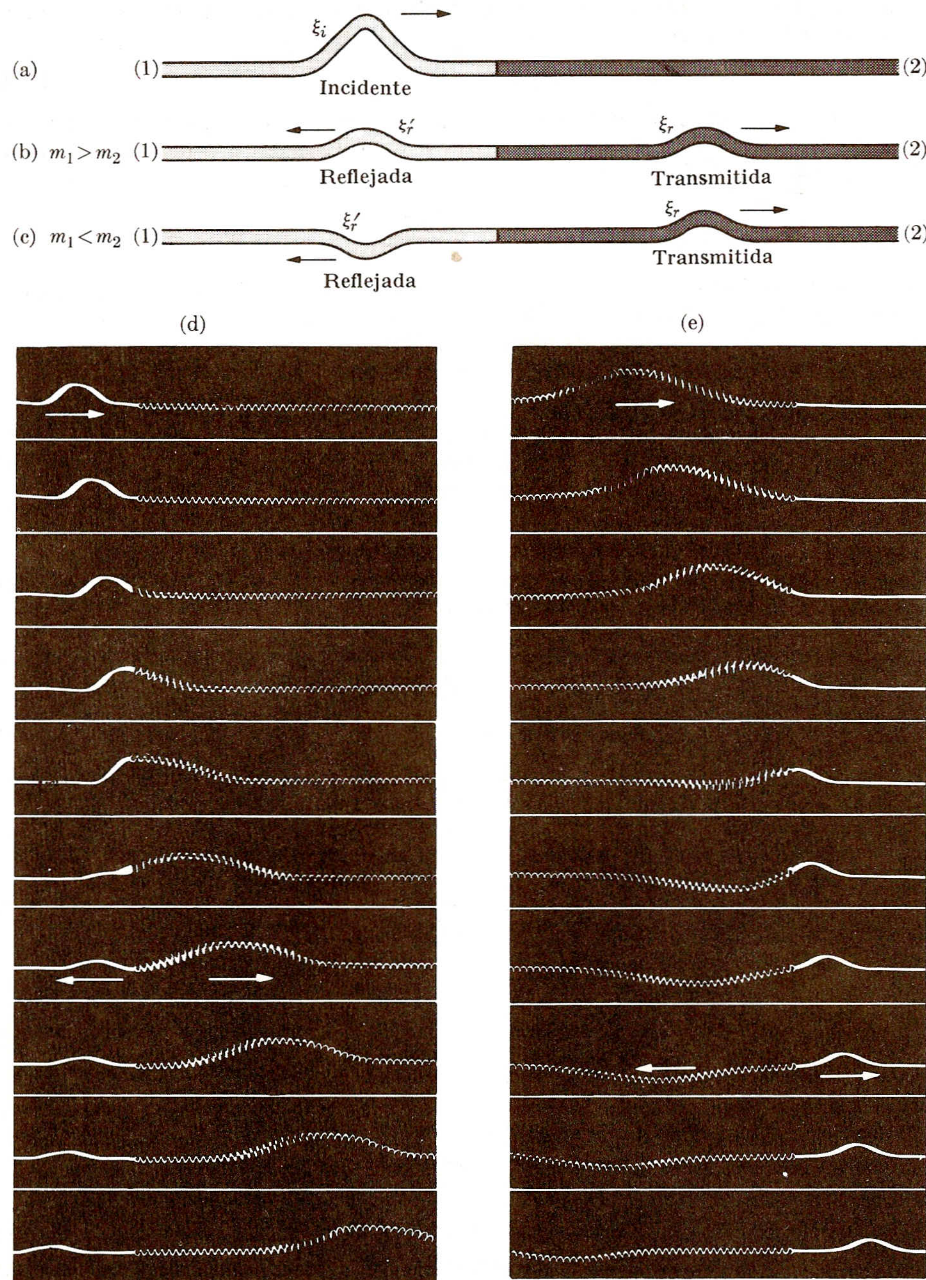


Fig. 20-16. Ondas incidente, reflejada y transmitida en dos cuerdas unidas de diferentes densidades. En (b) y (d) la cuerda que transporta la onda incidente es más densa; en (c) y (e) la cuerda de la izquierda es más ligera. (Fotografías de: *Physics*, D. C. Heath, Boston, 1960.)

las dos expresiones anteriores de F_y e igualándolas después de eliminar el factor común $\cos \omega t$, obtenemos

$$k_1(\xi_{0i} - \xi_{0r}') = k_2 \xi_{0r}. \tag{20.21}$$

Esta es una segunda condición que deben satisfacer las tres amplitudes y que está impuesta por la naturaleza física de la onda. Resolviendo el sistema de ecuaciones (20.20) y (20.21), obtenemos,

$$\xi_{0r} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}\,\xi_{0i}, \qquad \xi_{0r}' = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\,\xi_{0i}, \tag{20.22}$$

que determinan las amplitudes de las ondas reflejada y refractada. Notando que $k = \omega/v$, podemos escribir

$$\xi_{0r} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}\,\xi_{0i}, \qquad \xi_{0r}' = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\,\xi_{0i}. \tag{20.23}$$

Como en el caso de ondas transversales en una cuerda $v = \sqrt{T/m}$, de acuerdo con la ec. (18.30), donde m es la masa por unidad de longitud, podemos escribir también:

$$\xi_{0r} = \frac{2\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}\,\xi_{0i}, \qquad \xi_{0r}' = \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}\,\xi_{0i}. \tag{20.24}$$

Los cocientes ξ_{0r}/ξ_{0i} y ξ_{0r}'/ξ_{0i}' se llaman, respectivamente, *coeficientes de refracción* (o de transmisión) y *de reflexión;* designándolos **T** y **R**, respectivamente, se tiene

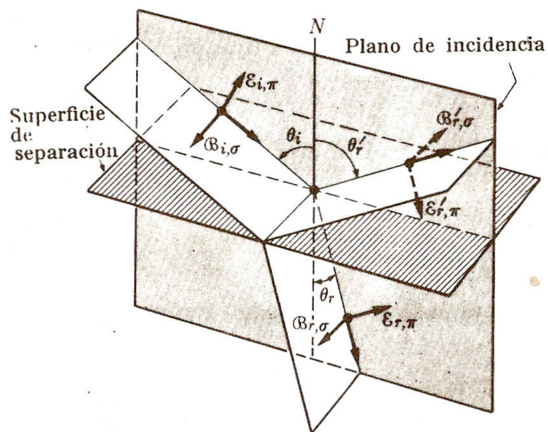
$$\mathbf{T} = \frac{2\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}, \qquad \mathbf{R} = \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}.$$

Observemos que **T** es siempre positiva, de modo que ξ_{0r}, tiene siempre el mismo signo que ξ_{0i} y la onda transmitida está siempre en fase con la onda incidente. Pero **R** es positiva o negativa dependiendo de si $m_1 \gtrless m_2$, de modo que la onda reflejada puede estar en fase o en oposición con la onda incidente. En el segundo caso, el defasaje con respecto a la onda incidente es π. Las dos situaciones se ilustran en la fig. 20-16.

El estudiante puede verificar el flujo de energía a través de la unión usando la rapidez con que fluye la energía en la cuerda (1) y en la cuerda (2). La energía transmitida es proporcional a $\mathbf{T}^2$ y la energía reflejada es proporcional a $\mathbf{R}^2$.

20.7 Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas

El caso de las ondas electromagnéticas requiere atención especial porque involucra dos campos: las componentes eléctrica y magnética de la onda. Ambos campos son perpendiculares a la dirección de propagación de cada onda, aunque pueden tener una orientación cualquiera alrededor de dicha dirección. Por lo tanto, al estudiar la reflexión y refracción de ondas electromagnéticas, es más conveniente imaginar cada campo formado de una componente *paralela* al plano de incidencia, designada por el subíndice π, y una componente *perpendicular* al mismo, designada por el subíndice σ. Debido a la perpendicularidad entre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$, tenemos una componente $\mathcal{E}_\pi$ asociada con $\mathcal{B}_\sigma$ y una componente $\mathcal{E}_\sigma$ asociada con $\mathcal{B}_\pi$. Según vimos en el capítulo 19, la polarización de una onda electromagnética está convencionalmente determinada por la dirección del campo eléctrico; por ello hemos ilustrado en la fig. 20-17 las componentes de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ polarizadas paralela-



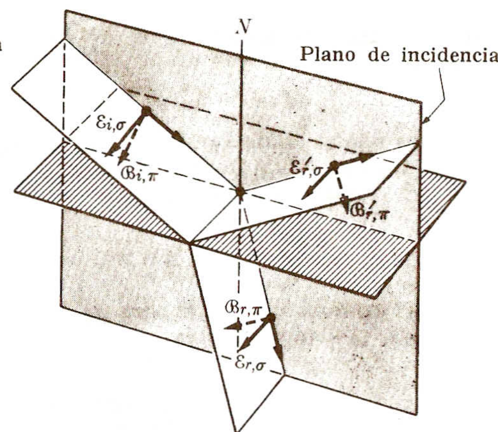


Fig. 20-17. Campos eléctrico y magnético de las ondas incidentes, reflejadas y refractadas para la polarización paralela al plano de incidencia.

Fig. 20-18. Campos eléctrico y magnético de las ondas incidente, reflejada y refractada para la polarización perpendicular al plano de incidencia.

mente en el plano de incidencia y en la fig. 20-18 para polarización perpendicular al plano de incidencia. En cada caso las flechas indican las orientaciones consideradas positivas para las componentes de $\mathcal{E}$. El caso general es una combinación de ambas polarizaciones, ya que, como se ha indicado anteriormente, los campos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ pueden siempre separarse en las componentes π y σ.

Las ecuaciones de Maxwell suministran ciertas relaciones entre las componentes paralela y perpendicular de los campos eléctrico y magnético a ambos lados de la superficie que separa dos medios, lo que nos permite establecer las relaciones entre las componentes del campo eléctrico en las ondas incidente, reflejada y refractada. A partir de ellas podemos calcular los coeficientes de reflexión y de refracción o transmisión. Cuando $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$, que es válido en un gran número de casos, los resultados que se obtienen son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_\pi &= \frac{\mathcal{E}'_{r,\pi}}{\mathcal{E}_{i,\pi}} = \frac{n_1 \cos\theta_r - n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_r + n_2 \cos\theta_i}, \\
\mathbf{R}_\sigma &= \frac{\mathcal{E}'_{r,\sigma}}{\mathcal{E}_{i,\sigma}} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_r}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_r} \\
\mathbf{T}_\pi &= \frac{\mathcal{E}_{r,\pi}}{\mathcal{E}_{i,\pi}} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_r + n_2 \cos\theta_i}, \\
\mathbf{T}_\sigma &= \frac{\mathcal{E}_{r,\sigma}}{\mathcal{E}_{i,\sigma}} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_r}.
\end{aligned}
\qquad (20.25)
$$

Hay una situación muy importante que corresponde a $\mathbf{R}_\pi = 0$. Entonces la onda reflejada no tiene la componente eléctrica del tipo $\mathcal{E}'_{r,\pi}$, sino sólo la $\mathcal{E}'_{r,\sigma}$. Luego, la onda reflejada está totalmente polarizada en un plano perpendicular

al plano de incidencia. Esto ocurre cuando, de acuerdo con la ec. (20.25), $n_2 \cos\theta_i = n_1 \cos\theta_r$. Como la ley de Snell, ec. (20.8), requiere que $n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_r$, tenemos que $\operatorname{sen}\theta_i \cos\theta_i = \operatorname{sen}\theta_r \cos\theta_r$, o $\operatorname{sen} 2\theta_i = \operatorname{sen} 2\theta_r$. La solución de esta ecuación da $2\theta_i = \pi - 2\theta_r$ ó $\theta_i + \theta_r = \pi/2$,* y esto implica que los rayos reflejado y refractado son perpendiculares. En consecuencia

cuando los rayos reflejado y refractado son perpendiculares, el rayo reflejado está totalmente polarizado, estando el campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia.

Esta situación se ilustra en la fig. 20-19, donde sólo se indican las conponentes del campo eléctrico; para simplificar, hemos omitido las componentes correspondientes al campo magnético. Ahora bien, como para el caso que se muestra en la fig. 20-19, $\operatorname{sen}\theta_r = \cos\theta_i$, el ángulo de incidencia dado por la ley de Snell es

$$\operatorname{tg}\theta_i = n_{21}. \qquad (20.26)$$

El ángulo θ_i dado por la ec. (20.26) se llama ángulo de polarización. El resultado establecido por la ec. (20.26) se llama *ley de Brewster.*

Puede demostrarse que no es posible tener $\mathbf{R}_\sigma = 0$ y satisfacer la ley de Snell al mismo tiempo. Por consiguiente, la componente perpendicular del campo eléctrico en la onda reflejada no puede ser cero a menos que ya lo sea en la onda incidente.

También podemos observar en la ec. (20.25) que los coeficientes de refracción $\mathbf{T}_\pi$ y $\mathbf{T}_\sigma$ no pueden anularse y por consiguiente la onda refractada no está nunca completamente polarizada. Sin embargo, si una onda electromagnética se transmite a través de una serie de láminas delgadas y paralelas (fig. 20.20), con un

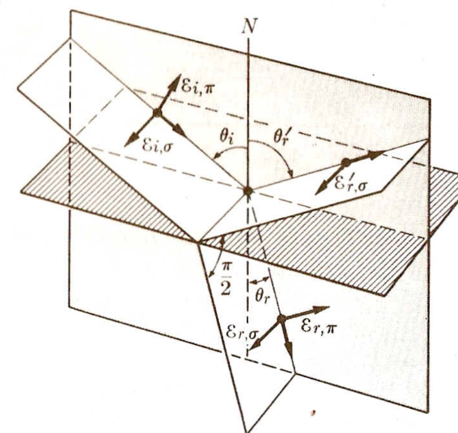


Fig. 20-19. Polarización de una onda electromagnética por reflexión.

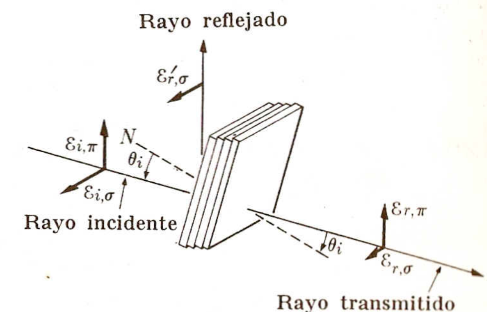


Fig. 20-20. Polarización de una onda electromagnética por refracciones sucesivas.

* Nótese que la posibilidad $2\theta_i = 2\theta_r$, ó $\theta_i = \theta_r$ se debe excluir debido a la ley de Snell.

ángulo de incidencia igual al ángulo de polarización, la onda transmitida tiene una componente $\mathcal{E}_{r,\sigma}$, mucho menor, porque esta componente tiende a irse con la onda reflejada cada vez que ésta se refleja al pasar de una lámina a la siguiente. Luego, la onda transmitida está casi totalmente polarizada y el campo eléctrico oscila en el plano de incidencia.

Además, observemos que los coeficientes de transmisión **T** son positivos, de modo que la onda transmitida está siempre en fase con la onda incidente. Sin embargo, los coeficientes de reflexión **R** pueden ser positivos o negativos, y la onda reflejada puede estar en fase o tener un defasaje de π con respecto a la onda incidente.

EJEMPLO 20.3. Calcular los coeficientes de reflexión y de transmisión para las ondas electromagnéticas en la región visible para el vidrio "crown" y un ángulo de incidencia de 30°.

Solución: En la tabla 20-1 tenemos $n_{\text{vidrio}} = 1{,}52$, y como para el aire $n_{\text{aire}} \approx 1$, tenemos entonces sen $\theta_i = 1{,}52$ sen θ_r. Haciendo $\theta_i = 30°$, obtenemos $\theta_r = 19° \, 12'$. Luego, aplicando las relaciones (20.25), obtenemos

$$\mathbf{R}_\pi = 0{,}165, \quad \mathbf{R}_\sigma = -0{,}248, \quad \mathbf{T}_\pi = 0{,}442, \quad \mathbf{T}_\sigma = 0{,}752.$$

Obsérvese que la componente perpendicular de la onda reflejada ha sufrido un cambio de fase de π. El ángulo de Brewster para el vidrio "crown" corresponde a tg $\theta_i = 1{,}52$ ó $\theta_i = 56° \, 41'$.

TABLA 20-1 Indices de refracción absolutos de varias sustancias para ondas electromagnéticas*

Sustancia	n	Sustancia	n
agua (25° C)	1,33	vidrio "crown"	1,52
alcohol (20° C)	1,36	vidrio "flint"	1,65
bisulfuro de carbono	1,63	sodio (líquido)	4,22
hielo	1,31	diamante	2,417
cuarzo	1,51	aire	1,00029

* Valores medios en la región visible del espectro.

20.8 *Propagación de ondas electromagnéticas en un medio anisótropo*

Cuando una onda transversal se propaga a través de un medio anisótropo, la velocidad de propagación de la onda depende de la dirección de polarización y de la dirección de propagación de la onda. Esto se da particularmente en el caso de ondas electromagnéticas (que son las únicas que consideraremos en esta sección). La polarizabilidad de la mayoría de las moléculas no es la misma en todas direcciones. Como las moléculas en los gases y en los líquidos están orientadas al azar, esta dependencia direccional de la polarizabilidad no da lugar a efecto particular alguno y el medio se comporta macroscópicamente como una sustancia isótropa. Pero en un sólido cristalino, las moléculas están más o menos

orientadas y su orientación está "congelada"; esto es, no son libres de rotar alrededor de sus posiciones de equilibrio dentro de la red cristalina. De este modo las propiedades del cristal en general dependen de la dirección según la cual se miden. Dependiendo del arreglo y de la estructura molecular, los sólidos cristalinos pueden comportarse ópticamente como un medio isótropo o anisótropo.

El hecho de que la polarizabilidad del medio no sea la misma en todas las direcciones significa que, en general, la polarización $\mathcal{P}$ no tiene la misma dirección que el campo eléctrico $\mathcal{E}$ (fig. 20-21). En consecuencia, el vector de desplazamiento $\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}$ no es paralelo a $\mathcal{E}$. Esta situación es matemáticamente muy similar a la encontrada en el capítulo 10 cuando discutimos la relación entre el momentum angular $\boldsymbol{L}$ y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de un cuerpo rígido en rotación. Recordemos que en un cuerpo en rotación $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ no son paralelos, excepto en el caso de la rotación según el eje principal del cuerpo. Análogamente encontramos

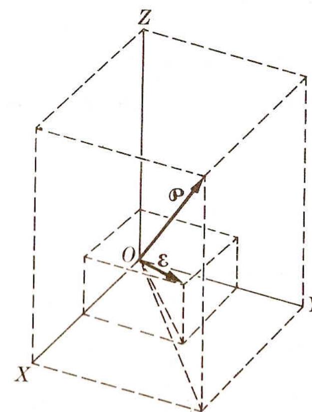


Fig. 20-21. Orientación de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{P}$ en una sustancia anisótropa.

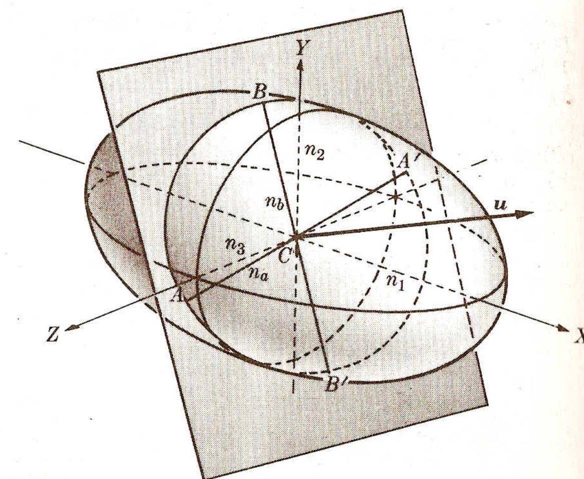


Fig. 20-22. Elipsoide de Fresnel. La elipse $ABA'B'$ es la intersección del elipsoide con un plano perpendicular a $\boldsymbol{u}$ que pasa por C.

que hay como mínimo tres direcciones perpendiculares, llamadas ejes principales, característicos de cada sustancia, para los cuales $\mathcal{E}$ y $\mathcal{D}$ son paralelos. Orientando los ejes coordenados XYZ paralelamente a los ejes principales y designando los tres valores de la permitividad de la sustancia correspondiente a cada uno de los ejes principales por ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, tenemos que las componentes de $\mathcal{D}$ para una orientación arbitraria de $\mathcal{E}$ son, por extensión de la ec. (16.14),

$$\mathcal{D}_x = \epsilon_1 \mathcal{E}_x, \quad \mathcal{D}_y = \epsilon_2 \mathcal{E}_y, \quad \mathcal{D}_z = \epsilon_3 \mathcal{E}_z.$$

Podemos hablar también de tres índices principales de refracción n_1, n_2 y n_3, asociado cada uno con la correspondiente permitividad, como se indica en la ec. (19.57).

Tanto los experimentos como la teoría (basada en las ecuaciones de Maxwell y en la discusión previa) muestran que

> *en un medio anisótropo, a cada dirección de propagación de una onda electromagnética plana corresponden dos posibles estados de polarización mutuamente perpendiculares, cada uno de los cuales se propaga con diferente velocidad.*

De este modo, cualquiera sea el estado inicial de polarización, cuando una onda electromagnética penetra en una sustancia anisótropa, se separa en dos ondas, polarizadas en direcciones perpendiculares y que se propagan con diferentes velocidades de fase. Esta situación da lugar al fenómeno de doble refracción, que será discutido en la sección 20-10.

Veamos a continuación cómo se puede determinar la velocidad de fase y el estado de polarización de una onda, dada la dirección de propagación de la onda. Podemos hacerlo usando un método geométrico sugerido por el físico francés Agustin Fresnel (1788-1827) mucho antes de que se formulara la teoría de las ondas electromagnéticas. Construyamos un elipsoide de ejes n_1, n_2 y n_3, llamado *elipsoide de Fresnel* (fig. 20-22). Entonces, dada la dirección de propagación de la onda, determinada por el versor $\boldsymbol{u}$, trazamos un plano por el centro C del elipsoide y perpendicular a $\boldsymbol{u}$. La intersección del plano con el elipsoide es una elipse. Las direcciones de los dos ejes AA' y BB' de esta elipse determinan los planos de polarización de la onda para la dirección de propagación dada. Las longitudes CA y CB de los ejes de la elipse dan los índices de refracción n_a y n_b para cada polarización y por consiguiente la correspondiente velocidad de fase.

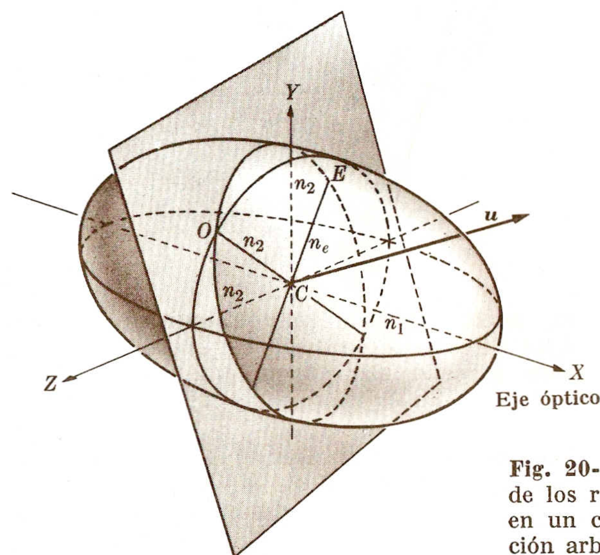


Fig. 20-23. Direcciones de polarización de los rayos ordinario y extraordinario en un cristal uniáxico para una dirección arbitraria de propagación.

Los medios isótropos se caracterizan por el hecho de que los tres índices principales de refracción son iguales ($n_1 = n_2 = n_3$). El elipsoide de Fresnel es una esfera y el índice de refracción es el mismo en todas las direcciones. Por consiguiente no existe una dirección especial de polarización, ya que todas las intersecciones son circunferencias. Los *cristales cúbicos*, así como la mayoría de los medios no cristalinos, se comportan de este modo. Otro caso especial es aquel en el cual dos índices principales de refracción son iguales, digamos $n_2 = n_3$. La dirección que corresponde al índice desigual n_1, se llama *eje óptico;* éste es un eje de simetría del cristal. Por esta razón estas sustancias se denominan cristales *uniáxicos*. A esta clase pertenecen los cristales de los sistemas *trigonal, hexagonal* y *tetragonal*. Cuando $n_2 < n_1$, el cristal se llama *positivo;* cuando $n_2 > n_1$, es *negativo*. El elipsoide de Fresnel de un cristal uniáxico es un elipsoide de revolución alrededor del eje óptico (fig. 20-23). Sabemos por las propiedades geométricas de un elipsoide de revolución, que su intersección con un plano que pasa por su centro C y es perpendicular a la dirección de propagación $\boldsymbol{u}$, es una elipse, uno de cuyos ejes (CO) es siempre igual a n_2 y está dirigido perpendicularmente a la dirección de propagación y al eje óptico, mientras que el otro eje (CE) tiene una longitud n_e que varía entre n_2 y n_1 y está en el plano determinado por la dirección de propagación y el eje óptico. En este caso podemos definir dos ondas: ordinaria y extraordinaria.

La *onda ordinaria* está polarizada linealmente en el plano determinado por CO y $\boldsymbol{u}$ y es por lo tanto perpendicular al plano determinado por la dirección de propagación y el eje óptico. La onda ordinaria se propaga en todas las direcciones con la misma velocidad $v_o = v_2 = c/n_2$. Por lo tanto se comporta como una onda en un medio isótropo siendo ésta la razón de su denominación.

La *onda extraordinaria* está polarizada linealmente en el plano determinado por CE y $\boldsymbol{u}$ o (lo que es lo mismo) por la dirección de propagación y el eje óptico; pero su velocidad v_e depende de la dirección de propagación, variando entre v_2 y v_1 (correspondientes a los índices de refracción n_2 y n_1).

Cuando las ondas se propagan según el eje óptico, la elipse de intersección es una circunferencia de radio n_2 y las dos ondas se propagan con la misma velocidad v_2. Esto puede considerarse como otra definición de eje óptico (fig. 20-24a); el eje óptico es la dirección según la cual hay una sola velocidad de propagación. Cuando las ondas se propagan perpendicularmente al eje óptico, la elipse de

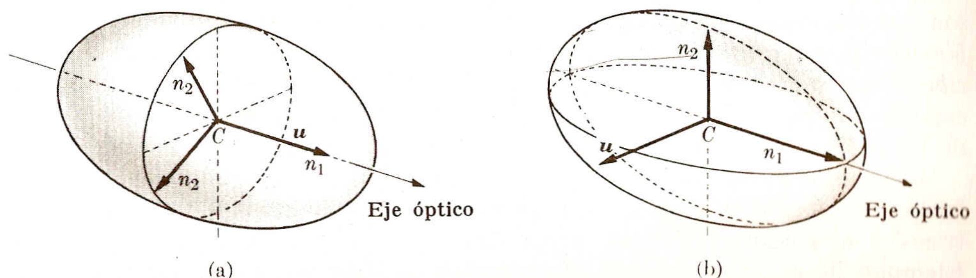


Fig. 20-24. Direcciones de polarización de los rayos ordinario y extraordinario en un cristal uniáxico para una propagación (a) paralela, (b) perpendicular al eje óptico.

intersección tiene por semiejes n_1 y n_2 y la onda extraordinaria tiene la velocidad v_1 (fig. 20-24b).

Otra construcción geométrica útil se obtiene gráficamente dibujando para cada dirección de propagación, vectores de longitudes iguales a v_o y v_e, las velocidades de fase de las ondas ordinaria y extraordinaria, respectivamente, con lo que se obtiene una doble superficie (fig. 20-25) llamada *superficie de velocidades de Fresnel.* Una de las superficies es una esfera de radio $v_0 = v_2$, que corresponde a la velocidad de onda ordinaria. La otra superficie es un elepsoide de revolución cuyos ejes son v_1 y v_2, que corresponden a la onda extraordinaria. Las dos superficies son tangentes en el punto en que interceptan el eje óptico. En la fig. 20-25 se indica el estado de polarización para varias direcciones de propagación.

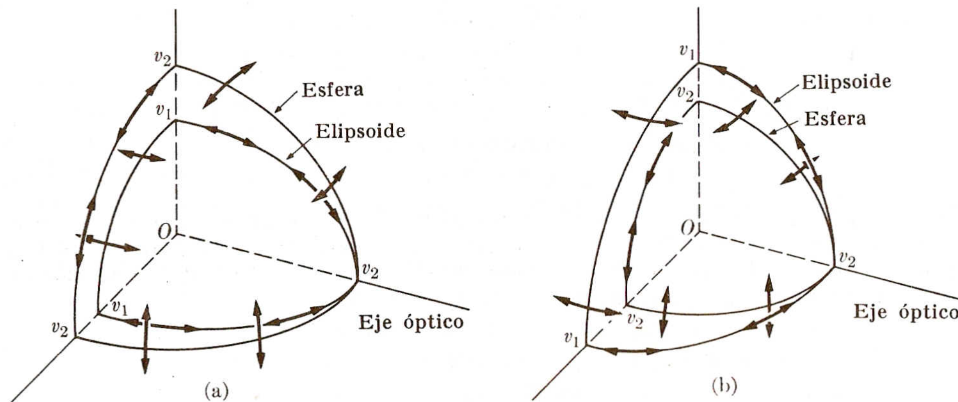


Fig. 20-25. Superficie de velocidades de Fresnel para cristales uniáxicos. (a) Un cristal positivo en el cual $n_2 < n_1$ (ó $v_2 > v_1$). (b) Un cristal negativo en el cual $n_2 > n_1$ (ó $v_2 < v_1$).

En el caso general de tres índices diferentes de refracción, se puede probar que hay dos direcciones para las cuales las velocidades de propagación de dos ondas polarizadas son iguales. Estas direcciones, también llamadas ejes ópticos, son perpendiculares a los planos cuyas intersecciones con el elipsoide de Fresnel son circunferencias. Las sustancias en las cuales estos ejes existen se llaman *biáxicas* y pertenecen a los sistemas cristalinos *ortorrómbico, monoclínico* y *triclínico.* La superficie de velocidades de Fresnel para cristales biáxicos es más complicada y no entraremos en discusión de sus detalles geométricos. La tabla 20-2 da los índices de refracción para diversos materiales uniáxicos y biáxicos.

Muchas sustancias que normalmente son isótropas se hacen anisótropas y birrefringentes cuando se someten a tensiones mecánicas o a intensos campos eléctricos o magnéticos estáticos, perpendiculares a la dirección de propagación. Ejemplos de esto son el efecto electroóptico de Kerr y el efecto magnetoóptico de Cotton-Mouton. En todos los casos la anisotropía de la sustancia se debe a la orientación parcial de las moléculas que resulta de las tensiones o de los campos.

TABLA 20-2 Indices principales de refracción de varios cristales*

Sustancia	n^1	n_2	n_3
uniáxicas:			
apatita	1,6417	1,6461	
calcita	1,4864	1,6583	
cuarzo	1,5533	1,5442	
zircón	1,9682	1,9239	
biáxicas:			
aragonita	1,5301	1,6816	1,6859
yeso	1,5206	1,5227	1,5297
mica	1,5692	1,6049	1,6117
topacio	1,6155	1,6181	1,6250

* Para la luz del sodio, $\lambda = 5{,}893 \times 10^{-7}$ m

EJEMPLO 20.4. Una onda linealmente polarizada incide sobre una lámina delgada de un material uniáxico, tal como el cuarzo, cortado con las caras paralelas al eje óptico. Hallar el defasaje entre las ondas ordinaria y extraordinaria y el estado de polarización de la onda emergente.

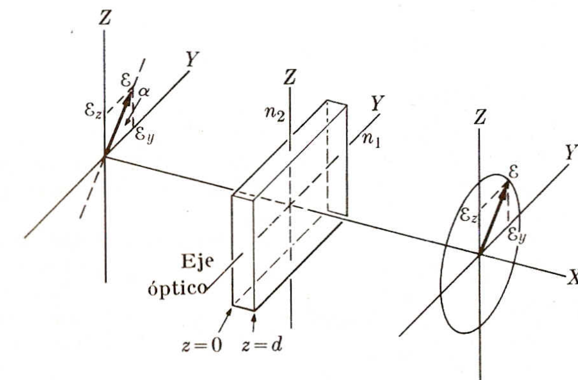


Fig. 20-26. Cambio de polarización de una onda electromagnética después de atravesar una placa de caras paralelas cortada de un cristal uniáxico.

Solución: La fig. 20-26 muestra la disposición experimental. La placa de cristal se ha colocado con el eje óptico (índice n_1) horizontal. La dirección del eje óptico se ha designado por Y. La dirección perpendicular Z corresponde a la polarización del rayo ordinario (índice n_2). Supongamos que una onda linealmente polarizada que forma un ángulo con el eje Y incide sobre la placa. Entonces podemos escribir $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx)$ para el campo eléctrico en la onda incidente. Obsérvese que hemos invertido el orden de los términos en la función seno lo que es más conveniente para nuestro cálculo y es la forma alternativa de la ec. (18.10). Las componentes

del campo eléctrico en la onda incidente según los ejes Y y Z son

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{0y} \operatorname{sen} (\omega t - kx), \qquad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{0z} \operatorname{sen} (\omega t - kx),$$

donde

$$\mathcal{E}_{0y} = \mathcal{E}_0 \cos \alpha \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_{0z} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \alpha.$$

Cuando la onda polarizada linealmente se propaga a través del cristal, se separa en dos ondas con sus campos eléctricos según los ejes Y y Z, respectivamente. Estas componentes corresponden a las ondas ordinaria y extraordinaria. Como la velocidad de propagación de cada onda es $v_1 = c/n_1$ y $v_2 = c/n_2$, los correspondientes vectores de propagación son

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega n_1}{c} = kn_1, \qquad k_2 = kn_2,$$

donde $k = \omega/c$. Por lo tanto, después que las ondas han atravesado el espesor d, los campos eléctricos respectivos están representados por las expresiones

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{0y} \operatorname{sen} (\omega t - k_1 d), \qquad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{0z} \operatorname{sen} (\omega t - k_2 d),$$

resultando un defasaje entre las dos ondas de

$$\delta = (k_1 - k_2)d = k(n_1 - n_2)d = 2\pi(n_1 - n_2)d/\lambda.$$

Después de atravesar la placa anisótropa las dos ondas se combinan en una sola. De acuerdo con la discusión hecha en la sección 12.9, concluimos que debido al defasaje, la onda transmitida estará, en general, polarizada elípticamente. Los ejes de la elipse serán paralelos a los ejes Y y Z si δ es un múltiplo impar de $\pi/2$, o sea si

$$(n_1 - n_2)d = \text{entero impar} \times \lambda/4.$$

La onda transmitida estará polarizada linealmente si δ es un múltiplo de π ó sea si

$$(n_1 - n_2)d = \text{entero} \times \lambda/2.$$

En este caso si el entero es par, la onda transmitida está polarizada linealmente en el mismo plano que la onda incidente, pero si el entero es impar, está polarizada en un plano simétrico respecto al plano XZ. Evidentemente, si el ángulo α es de 45°, estos dos planos serán perpendiculares entre sí.

Las láminas correspondientes a las dos condiciones dadas arriba se llaman *lámina de cuarto de onda* y *lámina de media onda*. Estos tipos de lámina se usan ampliamente para el análisis de la luz polarizada.

La misma situación ocurre en sentido opuesto; si a través de una lámina de cuarto de onda pasa luz polarizada elípticamente se convierte en luz polarizada linealmente.

20.9 Dicroísmo

Algunas sustancias anisótropas absorben las ondas ordinarias y extraordinarias en proporciones muy diferentes. En tales condiciones una onda electromagnética que se propague a través de una porción de sustancia suficientemente gruesa aparece gradualmente polarizada en un plano, ya que una de las ondas, la ordinaria o la extraordinaria, es casi completamente absorbida. La situación se denomina *dicroísmo* y se ilustra en la fig. 20-27, en la cual $\mathcal{E}_0$ es la amplitud del campo eléctrico de la onda incidente. La onda incidente, en cuanto penetra en la sustancia, se separa en las ondas ordinaria y extraordinaria, polarizadas paralelamente a los ejes Y y Z. Sus amplitudes son $\mathcal{E}_{0y}$ y $\mathcal{E}_{0z}$. Si $\mathcal{E}_{0z}$ es absorbida más que $\mathcal{E}_{0y}$, tenemos sólo $\mathcal{E}_{0y}$ después que las ondas han penetrado una cierta distancia con lo cual resulta luz polarizada linealmente.

Como el dicroísmo resulta de una diferencia en los coeficientes de absorción, depende de la frecuencia de la onda electromagnética, y una sustancia puede exhibir el fenómeno en mayor grado a ciertas frecuencias que a otras. Para la región visible hay dos sustancias dicroicas especialmente importantes. Una es la *turmalina* (borosilicato de aluminio), que absorbe con preferencia el rayo ordinario. La otra es la *herapatita* (sulfato de yodoquinina), que tiene el inconveniente de que sus cristales son muy quebradizos y por consiguiente difíciles de preservar en tamaño apropiado. Sin embargo, la Polaroid Corporation hace esta sustancia en una forma llamada *polaroide*, que consiste en muchos cristales pequeños paralelos entre sí y colocados entre dos hojas de vidrio o celuloide. La misma compañía construye otros materiales dicroicos, usando sustancias compuestas de moléculas muy largas orientadas paralelamente, tal como el alcohol polivinílico. Esta combinación da un material que tiene propiedades muy diferentes en dirección longitudinal y en dirección transversal. El dicroísmo constituye una de las maneras más simples y económicas para producir y analizar luz polarizada.

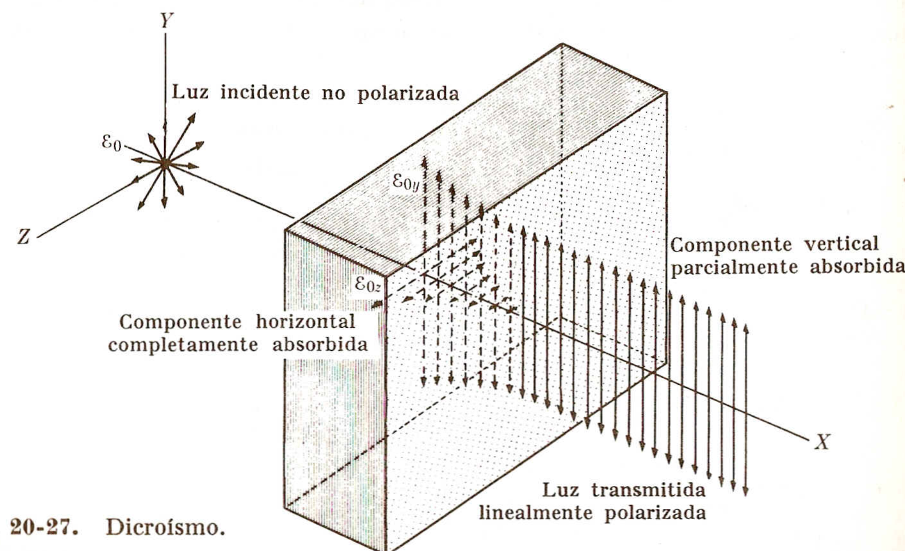


Fig. 20-27. Dicroísmo.

20.10 Doble refracción

En esta sección estudiaremos cómo se comporta una onda electromagnética cuando se transmite o refracta en un medio anisótropo, limitándonos a las sustancias uniáxicas. No nos ocuparemos de la onda reflejada, ya que no involucra ningún factor esencialmente diferente de aquellos ya discutidos en este capítulo.

Comenzaremos tratando el caso simple de incidencia normal de una onda plana sobre una superficie también plana perpendicular al eje óptico, el cual coincide con la página del libro. Consideraciones de simetría requieren que ambas superficies refractadas, la ordinaria y la extraordinaria, sean planas y también que permanezcan paralelas a la superficie de separación mientras se propagan en el medio anisótropo. Para determinar las direcciones de los rayos ordinario y extraordinario, en los puntos de incidencia (fig. 20-28) trazamos la superficie de velocidades de Fresnel, indicada previamente en la fig. 20-25. Las tangentes comunes de las dos hojas de la superficie de velocidades de Fresnel dan los frentes de onda ordinario y extraordinario. Los puntos de tangencia determinan las direcciones de los rayos ordinario y extraordinario. Por lo tanto, la onda ordinaria se propagará en la dirección de incidencia y estará linealmente polarizada en un plano perpendicular al plano del papel (lo que se indica con puntos en la fig. 20-28).

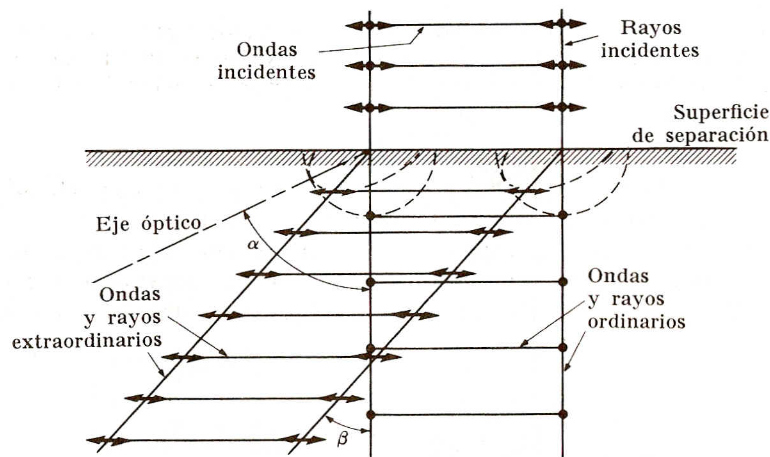


Fig. 20-28. Rayos ordinarios y extraordinarios para incidencia normal sobre la cara de un cristal uniáxico. Las polarizaciones lineales de los rayos ordinarios y extraordinarios son perpendiculares entre sí.

Sin embargo, la onda extraordinaria, aunque permanece paralela a la superficie de separación, experimentará un desplazamiento lateral, de modo que la energía fluya según el rayo extraordinario, a un ángulo β con respecto a la dirección de propagación. La onda extraordinaria estará polarizada en el plano del papel (lo que se indica con barras en la fig. 20-28). Cuando a un solo rayo incidente corresponden dos rayos refractados ocurre el fenómeno llamado *doble refracción*, y por esa razón las sustancias anisótropas se denominan *birrefringentes*. Cuando la sustancia está limitada por dos superficies paralelas (fig. 20-29), los rayos ordinario y extraordinario emergen paralelos pero separados, resultando una doble imagen, como se muestra en la fotografía de un cristal de calcita de la fig. 20-30.

Cuando la incidencia es oblicua, la situación es algo más complicada geométricamente, pero el resultado físico es esencialmente el mismo. Por cada onda

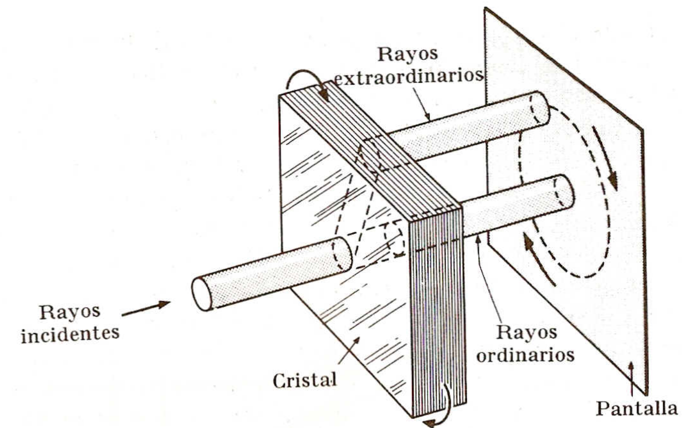


Fig. 20-29. Un haz estrecho de luz no polarizada se puede separar en dos haces por medio de un cristal birrefringente. Si el cristal rota, el haz extraordinario rota alrededor del haz ordinario. Los dos haces están polarizados linealmente en direcciones perpendiculares.

incidente, hay dos ondas refractadas diferentes que se propagan en diferentes direcciones y que están polarizadas en direcciones perpendiculares.

La doble refracción es un instrumento muy importante de investigación en el estudio de la estructura cristalina, y tiene muchas otras aplicaciones interesantes. Una aplicación práctica consiste en producir un haz de luz polarizada en un plano

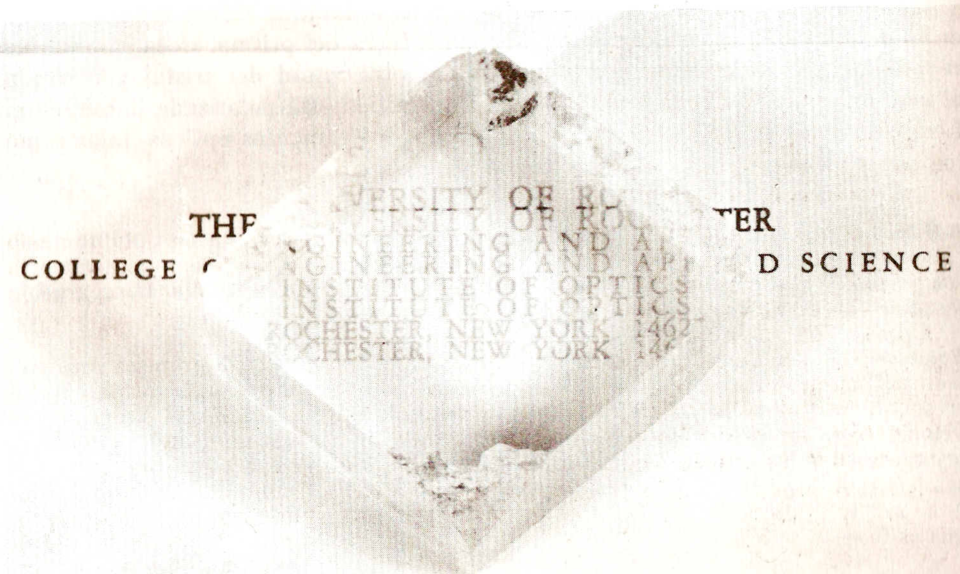


Fig. 20-30. Fotografía de la doble imagen producida por un cristal de calcita. (Cortesía de W. L. Hyde, Director del Instituto de Optica, Universidad de Rochester).

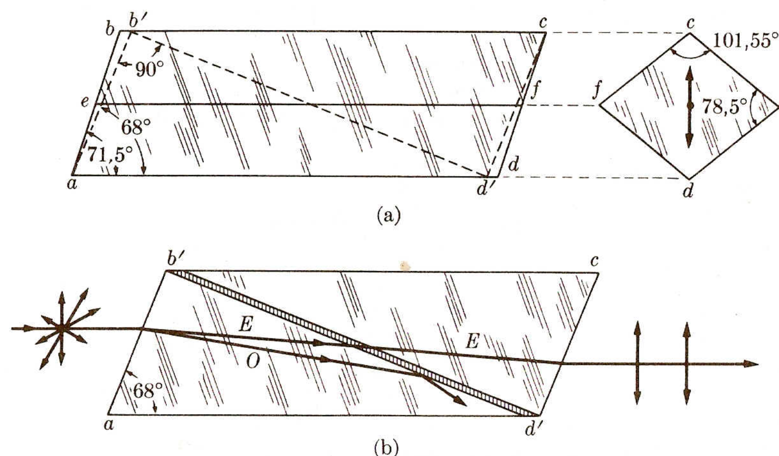


Fig. 20-31. (a) Cristal de calcita natural llamado espato de Islandia. (b) Prisma de Nicol.

por medio de un *prisma de Nicol.* Para hacer un prisma de Nicol se corta un cristal de calcita cuyo largo es cuatro veces su ancho por sus caras extremas, como se muestra con las líneas de trazos *ab'* y *cd'* de la fig. 20-31a. Entonces el cristal se corta diagonalmente a lo largo de la línea *b'd'* y las dos mitades se pegan con bálsamo del Canadá. El índice de refracción del bálsamo es diferente de los índices del cristal de calcita para los rayos ordinario y extraordinario. Debido a esto y también a la geometría del cristal, los rayos ordinarios sufren reflexión total en la superficie de separación y son desviados fuera del prisma, mientras que los rayos extraordinarios prosiguen dentro de la otra mitad del cristal y emergen al otro extremo. Por consiguiente, la luz transmitida está polarizada linealmente. Los prismas de Nicol son utilizados en muchos instrumentos ópticos, tales como los polarímetros.

EJEMPLO 20.5. Un rayo de luz incide sobre un cristal de calcita cortado de modo tal que su superficie sea paralela al eje óptico. Suponiendo que el plano de incidencia sea perpendicular a éste y que el ángulo de incidencia sea de 50°, hallar la separación angular entre los rayos ordinario y extraordinario.

Solución: De acuerdo a las figs. 20-24 y 20-25, cuando la onda se propaga en dirección perpendicular al eje óptico, el rayo ordinario se propaga con velocidad v_2 correspondiente al índice de refracción n_2 y la onda extraordinaria se propaga con velocidad v_1 correspondiente al índice de refracción n_1. Por lo tanto usando la ley de Snell y los índices de refracción principales dados en la tabla 20-2, tenemos sen θ_i/sen $\theta_o = n_2 = 1{,}6583$ y sen θ_i/sen $\theta_e = n_1 = 1{,}4864$. Dado $\theta_i = 50°$, obtenemos $\theta_o = 27° \, 30'$ y $\theta_e = 31° \, 5'$. De este modo la separación angular entre los dos rayos es $\theta_e - \theta_o = 3° \, 35'$.

EJEMPLO 20.6. Se observan ondas electromagnéticas a través de un dispositivo polarizante llamado en este caso un *analizador.* Estudiar las fluctuaciones en la intensidad de la onda transmitida cuando el analizador rota.

Solución: Consideremos la fig. 20-32. El analizador es un instrumento que transmite una onda cuyo campo eléctrico es paralelo al eje *AA'*. Cuando el eje *AA'* del analizador forma un ángulo θ con el campo eléctrico de la onda incidente polarizada linealmente, se transmite sólo la componente $\mathcal{E}_A = \mathcal{E} \cos \theta$. Por lo tanto, como la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado del campo eléctrico, tenemos la relación

$$I = I_0 \cos^2 \theta,$$

donde I_0 es la intensidad de la onda incidente e I la de la onda transmitida. Este resultado se conoce como *ley de Malus.* Cuando $\theta = 0$ ó π, la intensidad de la luz transmitida es máxima; cuando $\theta = \pi/2$ ó $3\pi/2$, la intensidad es cero. Por consiguiente, cuando el analizador rota, la intensidad de la onda transmitida fluctúa entre 0 e I_0. Esto, por ejemplo, proporciona un medio de determinar si una onda, digamos luminosa, está polarizada o no. Para ondas no polarizadas o circularmente polarizadas, no se observa fluctuación en la intensidad. Para ondas elípticamente polarizadas, la onda transmitida fluctúa entre un máximo y un mínimo. Estos dos extremos se obtienen cuando el analizador es paralelo al eje mayor o al eje menor de la elipse. El grado de polarización de la onda incidente está dado entonces por la expresión

$$P = \frac{I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}}.$$

Observar que $P = 1$ para ondas polarizadas linealmente y que $P = 0$ para ondas no polarizadas.

EJEMPLO 20.7. *Polarización cromática.* Cuando sobre una lámina similar a la considerada en el ejemplo 20.4, incide luz blanca polarizada linealmente y se analiza por medio de otro instrumento polarizador, la luz se ve coloreada, dependiendo el color de la orientación del analizador. El problema consiste en observar luz de diferentes longitudes de onda y determinar el color para cada orientación del analizador.

Solución: Consideremos el arreglo de la fig. 20-33. Supongamos por simplicidad que la luz blanca incidente esta polarizada linealmente formando el campo eléctrico un ángulo de 45° con el eje óptico de la lámina. Conforme a los resultados del ejemplo

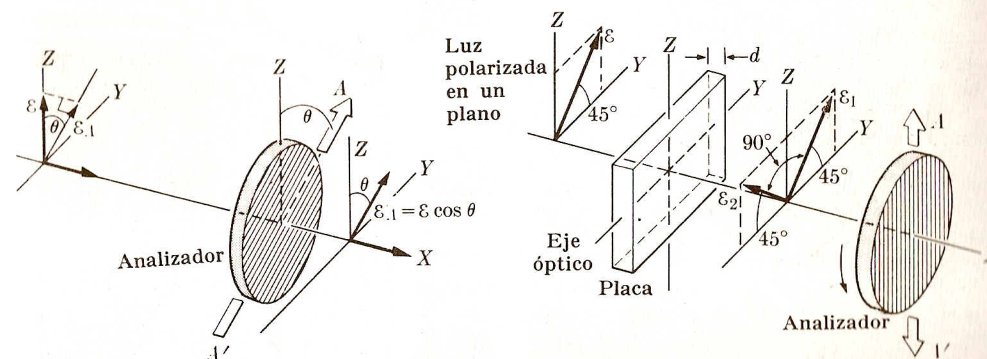


Fig. 20-32. Variación de la intensidad de luz polarizada linealmente al variar la orientación del analizador.

Fig. 20-33. Un cristal en forma de placa colocado entre un haz de luz polarizado linealmente y un analizador. El fenómeno resultante se llama *polarización cromática.*

20.4 la luz transmitida estará polarizada linealmente según $\mathcal{E}_1$ ó $\mathcal{E}_2$, dependiendo de que la longitud de la onda sea tal que

$$(n_1 - n_2)\,d = \begin{cases} \text{entero par} \times \lambda/2 \text{ (polarización } \mathcal{E}_1), \\ \text{entero impar} \times \lambda/2 \text{ (polarización } \mathcal{E}_2). \end{cases}$$

Para todas las otras longitudes de onda, la onda transmitida está polarizada elípticamente. Si observamos ahora la luz transmitida a través de un analizador, notaremos que ésta es coloreada en lugar de blanca y que el color cambia cuando se rota el eje del analizador AA'. Según el ejemplo 20.6, esto se debe a que cuando el eje del analizador es paralelo a $\mathcal{E}_1$, las correspondientes longitudes de onda son transmitidas con intensidad máxima, mientras las correspondientes a $\mathcal{E}_2$ están bloqueadas. En condiciones inversas, cuando el eje del analizador es paralelo a $\mathcal{E}_2$, aparecen los colores complementarios. Por consiguiente, cuando rotamos el analizador, obtenenemos un haz de iluminación variable, estando los colores complementarios separados 90°.

Este fenómeno se aplica al análisis de las tensiones de piezas estructurales usadas en los edificios y máquinas, dando lugar a una rama de la física aplicada llamada *fotoelasticidad*. Como decíamos al final de la sección 20.8, cuando un material plástico se somete a tensiones, se hace birrefringente, debido a la anisotropía resultante de las deformaciones. Por consiguiente, si se hace un modelo plástico y se somete a las mismas tensiones que una pieza real de estructuras, se comporta ópticamente como una lámina no homogénea birrefringente. La falta de homogeneidad se debe a la distribución no uniforme de las deformaciones en el plástico. Cuando la pieza en tensión reemplaza a la lámina de la fig. 20-33 resulta un diagrama (coloreado) como el de la fig. 20-34, por medio del cual se pueden estimar las deformaciones con el uso de técnicas especiales.

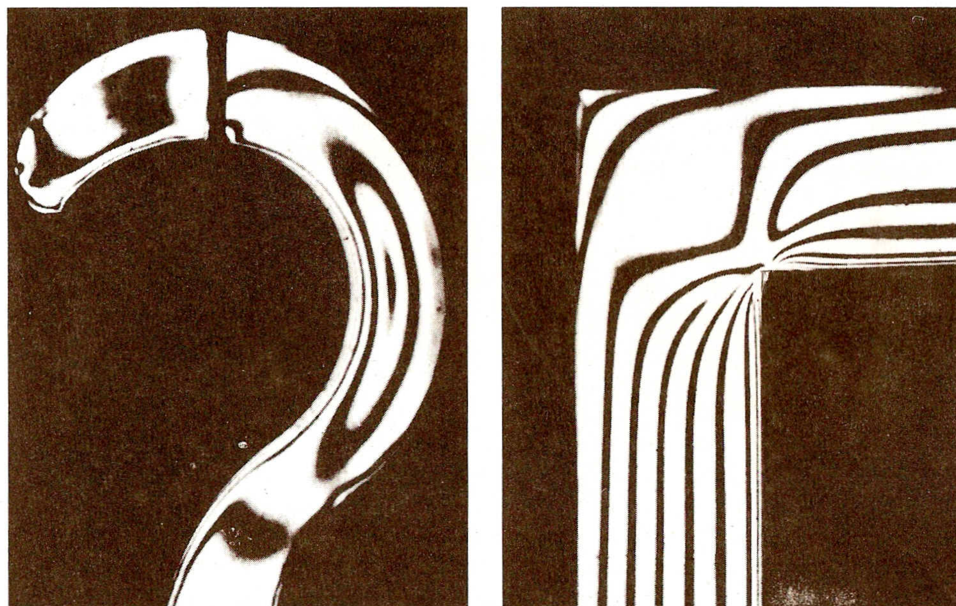


Fig. 20-34. Birrefringencia inducida en una sustancia por las tensiones aplicadas. (Cortesía de Klinger Scientific Apparatus Company).

20.11 *Actividad óptica*

Otro fenómeno relacionado con el carácter transversal de las ondas electromagnéticas es el de la rotación del plano de polarización, propiedad llamada *actividad óptica* cuando se observa en la región visible y en las cercanas a ella, del espectro electromagnético. Si un haz de luz polarizada linealmente pasa a través de una sustancia ópticamente activa (fig. 20-35), la onda transmitida está polarizada linealmente, pero en un plano que forma un ángulo θ con el plano de incidencia. El valor de θ es proporcional a la longitud l que el haz recorre en la sustancia y depende también de la naturaleza de la misma. Desde el punto de vista de un observador que recibe la luz transmitida, las sustancias se clasifican en *dextrógiras* o *levógiras* según que la rotación del plano de polarización vista por el observador sea en el sentido horario o antihorario (*dextro:* derecho; *levo:* izquierdo).

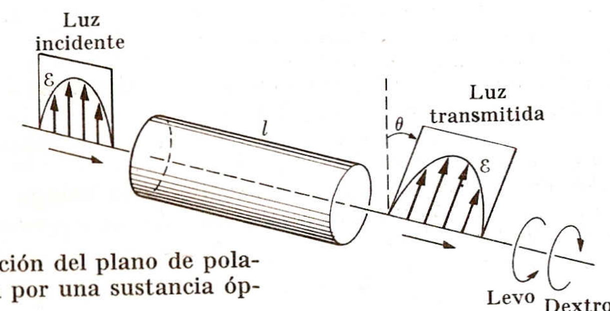


Fig. 20-35. Rotación del plano de polarización producida por una sustancia ópticamente activa.

Ciertas sustancias presentan actividad óptica sólo en el estado sólido. Muchos cristales inorgánicos, especialmente el cuarzo, y algunos orgánicos, tal como el benzil, son de este tipo. En fusión, solución o vapor, estas sustancias pierden su actividad óptica. Esto demuestra que la actividad óptica de estas sustancias depende de distribuciones especiales de los átomos o moléculas en el cristal, distribuciones que desaparecen cuando las moléculas se orientan al azar como sucede en los estados líquido y gaseoso. Otras sustancias, como la trementina, el azúcar, el alcanfor y el ácido tartárico, son ópticamente activas en todos los estados físicos y en solución. En este último tipo de sustancias la actividad óptica está asociada con las moléculas individuales y no con sus disposiciones relativas.

La actividad óptica resulta de cierto retorcimiento de las órbitas de los electrones en las moléculas o cristales bajo la acción de un campo electromagnético oscilatorio externo. Cuando tratamos la polarización de la materia (sección 16.5), supusimos que los electrones oscilaban en línea recta, paralelamente al campo en sustancias isótropas y formando un ángulo con el campo en sustancias anisótropas (sección 20.8). En ciertas moléculas y cristales, sin embargo, el movimiento de los electrones se hace según un camino curvo, que por simplicidad suponemos es una hélice (fig. 20-36). Supongamos que la molécula (o cristal) está orientada de tal modo que los caminos helicoidales del electrón son como se muestra en la fig. 20-36, esto es, con el eje de la hélice perpendicular a la dirección de propagación y paralelo tanto al campo eléctrico como al magnético de la onda incidente.

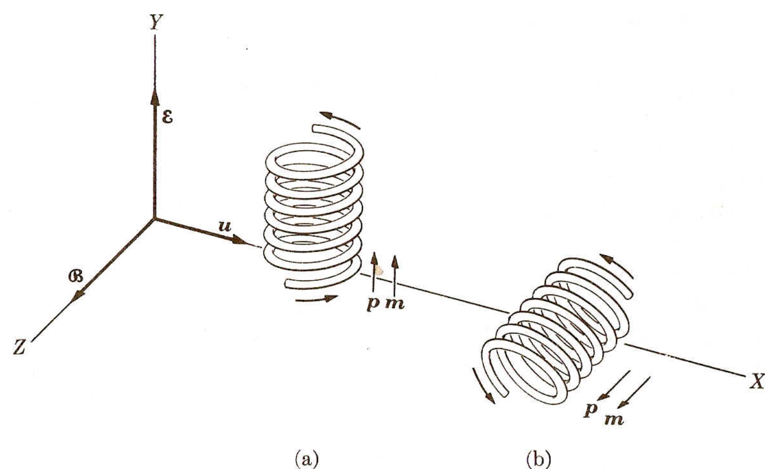


Fig. 20-36. Momentos dipolares eléctrico y magnético inducidos por una onda electromagnética en una molécula helicoidal.

Consideremos el primer caso u orientación (a). El campo eléctrico oscilante de la onda produce un movimiento oscilatorio de los electrones hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la hélice con lo cual resulta un momento dipolar eléctrico oscilante efectivo $\boldsymbol{p}$ paralelo al eje de la hélice. Hasta ahora la situación es similar a la de la polarización ordinaria. Pero debido a la forma del camino de los electrones, la corriente electrónica circulando por cada vuelta de la hélice es equivalente a un dipolo magnético $\boldsymbol{m}$ orientado también según el eje de la misma. Para la orientación (b), el campo magnético oscilante de la onda produce un flujo variable a través de cada vuelta de la hélice que, por la ley de Faraday-Henry, origina una corriente electrónica oscilante a lo largo de la misma. Esta corriente produce también un momento magnético oscilante $\boldsymbol{m}$ según el eje de la hélice. Pero el movimiento hacia atrás y hacia adelante del electrón, produce alternadamente en los extremos de la molécula, cargas positivas y negativas alternadas, con lo cual resulta un momento dipolar eléctrico oscilatorio efectivo $\boldsymbol{p}$ según el eje de la hélice. Por consiguiente, para ambas orientaciones de la molécula se producen un momento dipolar eléctrico $\boldsymbol{p}$ y un momento dipolar magnético $\boldsymbol{m}$ oscilantes y paralelos a los ejes moleculares. Estos dipolos radian ondas electromagnéticas, difundidas, tal como se discutió en la sección 19.9, donde sólo se consideró la difusión dipolar eléctrica, ya que el movimiento de los electrones se supuso en línea recta.

Un análisis matemático detallado de la onda difundida, que omitiremos aquí, muestra que según la dirección de propagación de la onda incidente, los campos $\mathcal{E}'$ y $\mathcal{B}'$ de la onda difundida están en fase con los de la onda incidente, pero oscilando en direcciones distintas debido a la diferente orientación relativa de los campos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ de un dipolo eléctrico y de uno magnético (figs. 19-8 y 19-12). Un observador según la dirección de propagación recibe las ondas incidente y difundida, las cuales interfieren porque están en fase, resultando una polarización lineal (recordar la sección 12.9) en una dirección que forma el ángulo θ con el plano original del vector eléctrico (fig. 20-37). Resulta así una rotación del plano de polarización de la onda. Para moléculas orientadas al azar se puede probar que el efecto es siempre el mismo, aunque su magnitud depende de la orientación molecular. De este modo la actividad óptica molecular persiste en cualquier estado físico o en solución. En algunos cristales, sin embargo, el efecto

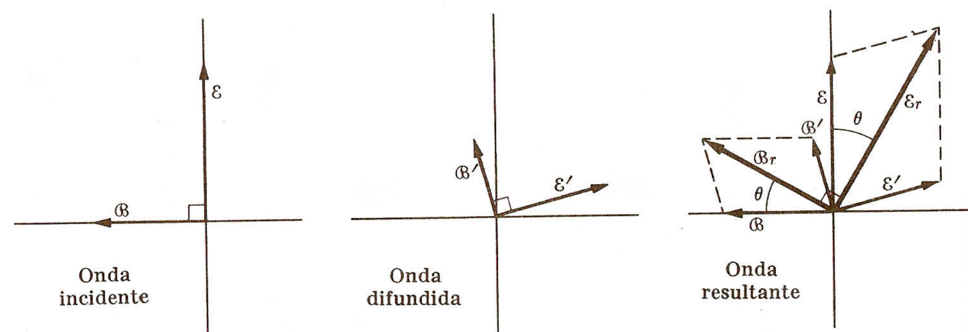


Fig. 20-37. Campos resultantes eléctrico y magnético debidos a la superposición de las ondas incidente y difundida.

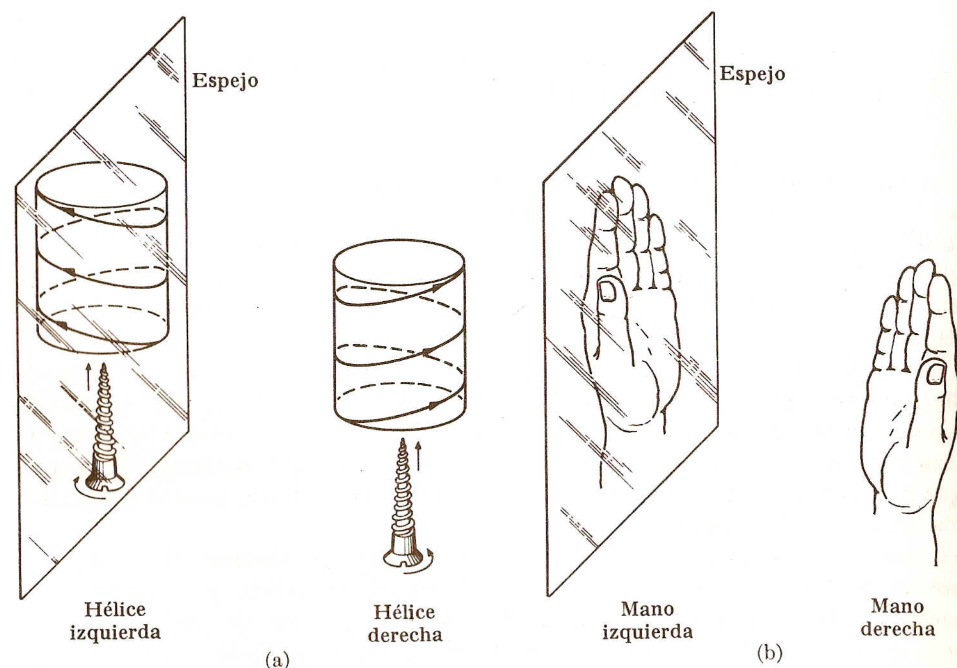
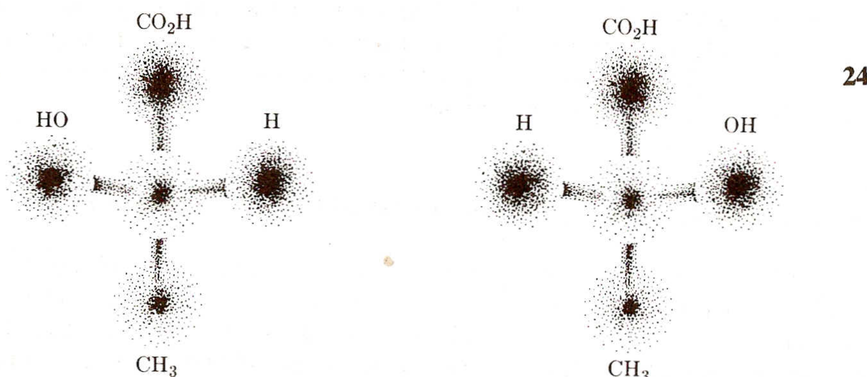


Fig. 20-38. Simetría derecha-izquierda. (a) La imagen especular de una hélice o tornillo de rosca derecha es una hélice o tornillo de rosca izquierda. (b) La imagen especular de la mano derecha es la mano izquierda.



24

Fig. 20-39. Formas del ácido láctico que son la imagen especular una de otra.

depende de la ordenación molecular; pero las moléculas individuales no tienen una simetría helicoidal, y por lo tanto el efecto desaparece cuando las moléculas se desordenan.

El estudiante puede darse cuenta que hay dos clases de hélices, derecha e izquierda (fig. 20-38). Una es la imagen especular de la otra, como la mano izquierda es la imagen especular de la mano derecha. Esta clase de simetría se llama *enantiomorfismo*. Algunas moléculas actúan como una hélice derecha y otras como una izquierda. En un caso la rotación del plano de polarización se efectúa en un sentido y en el otro en sentido contrario. Esto explica la existencia de sustancias dextrógiras y levógiras.

Algunas sustancias contienen ambas clases de moléculas, propiedad llamada *estereoisomerismo*. Por ejemplo, las moléculas de ácido láctico (CH_3—COH_2—CO_2H) pueden existir en una o en otra de las dos formas de imagen especular, como se ilustra en la fig. 20-39. Una muestra de ácido láctico que contenga cantidades iguales de ambas clases de moléculas es ópticamente inactiva, pero si predomina una sobre la otra, resulta una rotación neta.

En el caso del cuarzo (SiO_2), las moléculas son todas idénticas, pero sus ordenamientos espaciales en el cristal tienen simetría ya izquierda, ya derecha, como puede apreciarse en la apariencia externa de las dos clases de cristal de cuarzo que se muestran en la fig. 20-40, siendo una leve y la otra dextro. Cuando el cristal se funde los ordenamientos moleculares se destruyen y la actividad óptica desaparece.

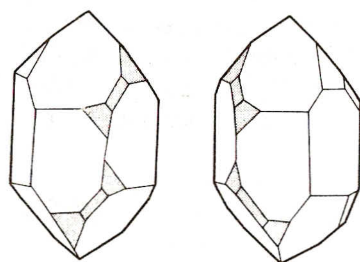


Fig. 20-40. Formas cristalinas del cuarzo que son la imagen especular una de otra.

Cuando una sustancia cuyas moléculas son ópticamente activas, tal como el ácido láctico, la levulosa, la dextrosa, etc., se disuelve en agua, la rotación del plano de polarización depende de la concentración. Este resultado se usa para determinar cuantitativamente la cantidad de sustancia que contiene una solución, tal como la concentración de azúcar en una melaza o en la orina.

Algunas sustancias llegan a ser ópticamente activas cuando, por algún medio, se introduce alguna forma de simetría helicoidal. Un método de lograr esto es aplicar un campo magnético estacionario intenso según la dirección de propagación. Esto se conoce como *efecto Faraday*.

20.12 Reflexión y refracción en superficies metálicas

En el capítulo 14 vimos que el campo eléctrico estacionario, en el interior de un conductor, es nulo. La situación no es exactamente la misma cuando el campo eléctrico depende del tiempo. Sin embargo, aún cuando el campo eléctrico dependa del tiempo, una onda electromagnética se atenúa grandemente cuando se propaga en un conductor, tal como un metal o un gas ionizado. No presentaremos aquí la teoría en detalle, pero sí indicaremos uno de los cambios fundamentales que tienen lugar en las ecuaciones que regulan la propagación de una onda electromagnética en un conductor.

Las ecs. (19.1) a (19.5) quedan sin alteración, pero la ec. (19.6) debe modificarse para tomar en consideración las corrientes inducidas en el conductor por el campo eléctrico de la onda. En la ec. (16.49) vemos que la densidad de corriente es $\boldsymbol{j} = \sigma\mathcal{E}$. Cuando esta corriente se incorpora dentro de la ecuación (19.6), una manipulación fácil y rápida indica que el campo eléctrico debe satisfacer la ecuación,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \qquad (20.27)$$

en lugar de la ec. (19.7) más simple. El término nuevo, $\mu\sigma\, \partial\mathcal{E}/\partial t$, siendo una derivada de primer orden respecto al tiempo, es similar al término $-\lambda dx/dt$ de amortiguamiento en un oscilador amortiguado, estudiado en la sección 12.12. Por lo tanto esto indica que la onda se va amortiguando a medida que progresa a través del metal. De este modo la onda disminuye rápidamente en intensidad a medida que penetra en el conductor. La solución de la ec. (20.27) se puede expresar en la forma

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-\alpha x} \operatorname{sen}(kx - \omega t), \qquad (20.28)$$

donde la velocidad de propagación $v = \omega/k$ y el coeficiente de amortiguamiento α están expresados por una relación algebraica complicada entre μ, ϵ y σ. Cuando la frecuencia es pequeña de modo que pueda despreciarse ω^2 y el material es muy buen conductor, tal que $\sigma \gg \epsilon\omega$, el estudiante puede verificar por sustitución directa de la ec. (20.28) en la ec. (20.27) que

$$k = \alpha \approx \sqrt{\tfrac{1}{2}\mu\sigma\omega}. \qquad (20.29)$$

La velocidad de propagación es entonces

$$v = \omega/k = \sqrt{2\pi/\mu\sigma}. \qquad (20.30)$$

En todo caso, el exponencial de la ec. (20.28) indica que la onda se amortigua a medida que avanza en el medio conductor.

Esta situación explica dos hechos importantes concernientes a los conductores. Uno es la opacidad, que resulta de la fuerte absorción de las ondas que en consecuencia no se transmiten a través de un conductor, a menos que éste sea una lámina muy delgada. Por consiguiente, los conductores son excelentes para aislar una región de ondas electromagnéticas. (Esto se hace, por ejemplo, rodeando la región con una rejilla metálica). El otro es la gran reflectividad de los conductores como consecuencia de que sólo una pequeña fracción de la energía de la onda incidente penetra al conductor yéndose la mayor parte de la energía en la onda reflejada. Esta alta reflectividad es típica de los metales. Una capa de gas ionizada también puede actuar como un conductor, reflejando las ondas electromagnéticas incidentes sobre ella. Este principio se usa, por ejemplo, en radiocomunicaciones para transmitir una señal de radio alrededor de la tierra. La señal se refleja hacia la tierra cuando alcanza una capa de la atmósfera altamente ionizada, llamada *ionosfera*, la cual dista cerca de 100 km de la superficie terrestre. De este modo es posible la comunicación entre dos puntos A y B, lo que no se podría lograr por medio de una onda propagándose en línea recta entre los dos puntos (fig. 20-41).

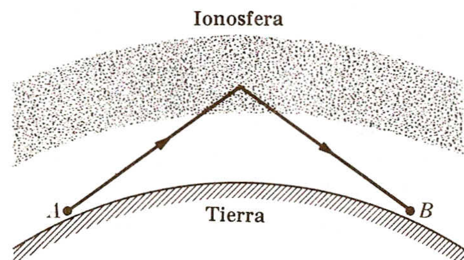


Fig. 20-41. Reflexión de ondas de radio en la ionosfera.

20.13 *Propagación en un medio no homogéneo*

Los fenómenos de reflexión y refracción descritos en las secciones previas corresponden a la situación en la cual una onda pasa de un medio homogéneo a otro. Sin embargo, en muchos casos una onda se propaga en un medio cuyas propiedades varían de punto a punto. Por ejemplo, en un día de verano las capas de aire bajas están más calientes que las superiores y tanto las ondas sonoras como las ondas luminosas experimentan refracción continua.

Consideremos la propagación de una onda a través de un medio estratificado (fig. 20-42), o sea, un medio compuesto de varias capas en las cuales la velocidad de propagación es diferente. Si una onda alcanza la primera superficie con un ángulo de incidencia θ_1, las sucesivas refracciones satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} n_1 \operatorname{sen} \theta_1 &= n_2 \operatorname{sen} \theta_2, \\ n_2 \operatorname{sen} \theta_2 &= n_3 \operatorname{sen} \theta_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

o sea

$$n \operatorname{sen} \theta = \text{const.} \tag{20.31}$$

Consideremos a continuación un medio cuyo índice de refracción depende de una coordenada, digamos y. Este puede considerarse como un medio estratificado cuyas capas sucesivas son muy delgadas. Entonces la ec. (20.31) aún es válida, y podemos escribir

$$n(y) \operatorname{sen} \theta = C, \tag{20.32}$$

donde C es una constante. Esta expresión da el ángulo θ en cada punto de la trayectoria del rayo; lo que permite trazarlo a través del medio no homogéneo.

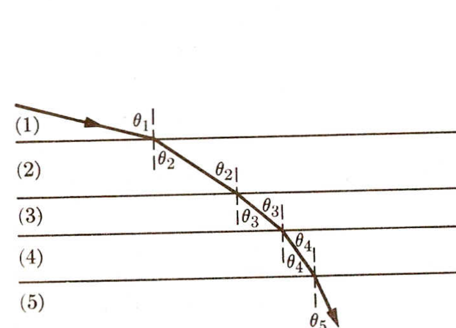


Fig. 20-42. Camino de un rayo en un medio estratificado.

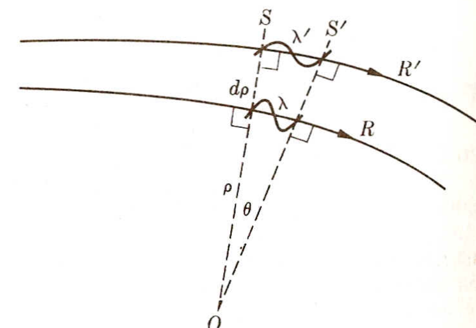


Fig. 20-43. Curvatura de un rayo en un medio no homogéneo.

EJEMPLO 20.8. Obtener el radio de curvatura de un rayo cuando la onda se propaga en un medio con índice de refracción variable.

Solución: Consideremos dos superficies de onda S y S' (fig. 20-43) separadas en el tiempo por un período. Luego, la distancia de separación a lo largo de cualquier rayo será una longitud de onda. Consideremos dos rayos muy cercanos R y R'. Como la velocidad de propagación varía de punto a punto, la longitud de onda es también variable, porque $\lambda = v/\nu = c/\nu n$. Sean λ y λ' las longitudes de onda a lo largo de los rayos correspondientes. Entonces, en la fig. 20-43, vemos que $\rho\theta = \lambda$ y $(\rho + d\rho)\theta = \lambda'$. Entonces $\theta d\rho = \lambda' - \lambda = d\lambda$. Pero $\theta = \lambda/\rho$, de modo que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{d}{d\rho}(\ln \lambda) = -\frac{d}{d\rho}(\ln n), \tag{20.33}$$

ya que $\ln \lambda = \ln c - \ln \nu - \ln n$, y c y ν son constantes. La ec. (20.33) indica que el camino está curvado de tal modo que su concavidad está en la dirección en que el índice de refracción aumenta.

Bibliografía

1. "Phase Change on Reflection from Isotropic Dielectrics", G. Friedmann y H. Sandhu, *Am. J. Phys.* **33**, 135 (1965)
2. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. Dover, New York, 1963, caps. 1, 13 y 15
3. *Fundamentos de óptica*, B. Rossi. Reverté, Barcelona, 1966, caps. 1, 6 y 8

4. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. R. Reitz y F. J. Milford. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960, secs. 16-2 a 16-4
5. *The Feynman Lectures on Physics*, R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963, vol. I, caps. 26, 31 y 33; vol. II, caps. 30 a 33
6. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, pág. 265 (Descartes); pág. 280 (Bartholinus); pág. 283 (Huygens); pág. 315 (Malus); pág. 352 (Faraday)
7. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton y D. H. D. Roller. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958, secs. 30.1 y 30.7

Problemas

20.1 Se ha propuesto la siguiente regla para construir el rayo refractado (figura 20-44): Usando unidades arbitrarias, se trazan en el punto de incidencia, dos circunferencias de radios 1 y n. El rayo incidente se prolonga hasta interceptar la circunferencia de radio 1. Se traza la perpendicular a la superficie por el punto y se halla su intersección con la circunferencia de radio n. El rayo refractado pasa por este punto.

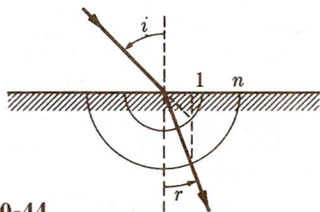


Figura 20-44

(a) Justificar esta regla. (b) Aplicarla al caso de $n = 1{,}5$ y ángulo de incidencia de 60°. (c) Repetir para $n = 0{,}80$ y ángulos de incidencia de 30° y 60°. Verificar los resultados usando la ley de Snell.

20.2 Un alambre de cobre de radio 1 mm se suelda a otro alambre del mismo material de radio 0,8 mm. Encontrar **T** y **R** en la unión, para ondas que se propagan en el sistema del primero al segundo alambre.

20.3 Dos alambres, uno de cobre y el otro de acero, del mismo radio, se unen formando un alambre más largo. Encontrar **T** y **R** en el punto de unión para ondas que se propaguen a lo largo del alambre. Sea 1 mm el radio común. Suponiendo que la frecuencia de la onda incidente es 10 Hz, que su amplitud es 2 cm y que la tensión es 50 N, escribir las ecuaciones de las ondas incidente, reflejada y transmitida. (La densidad del cobre es $8{,}89 \times 10^3$ kg m^{-3} y la del acero $7{,}80 \times 10^3$ kg m^{-3}.)

20.4 Para la situación discutida en el ejemplo 20.2, mostrar que la intensidad de la onda transmitida más la intensidad de la onda reflejada es igual a la intensidad de la ondad incidente. ¿Cuál es el significado físico de este resultado?

20.5 Sobre una placa de vidrio ($n = 1{,}5$) incide luz polarizada linealmente con un ángulo de incidencia de 45°. Hallar los coeficientes de reflexión y de refracción si el campo eléctrico de la onda incidente (a) está en el plano de incidencia, (b) es normal al plano de incidencia.

20.6 Una onda electromagnética incide perpendicularmente sobre una superficie plana que separa dos medios de índices n_1 y n_2. Usando la ec. (20.25), probar que los coeficientes de reflexión y de refracción son, en este caso, $\mathbf{R} = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ y $\mathbf{T} = 2n_1/(n_1 + n_2)$. Obsérvese que en este caso no tenemos que distinguir entre las componentes π y σ. Dibujar los campos eléctrico y magnético de las ondas incidentes, reflejadas y refractadas cuando $n_1 < n_2$ y cuando $n_1 > n_2$.

20.7 (a) Un haz de luz incide perpendicularmente sobre una placa de vidrio ($n = 1{,}5$). Encontrar los coeficientes de reflexión y de transmisión. (b) Repetir el cálculo para cuando la luz pasa del vidrio al aire. (c) Analizar en cada caso el cambio de fase. [*Sugerencia:* Usar los resultados del problema 20.6.]

20.8 Refiriéndose a la situación descrita en el problema 20.6, calcular, usando la ec. (19.16), las intensidades de las ondas reflejada y refractada y probar que su suma es igual a la intensidad de la onda incidente. [*Sugerencia:* Notar que en la ec. (19.16) debemos reemplazar c por la velocidad $v = c/n$ en el medio y que $E = \epsilon\mathcal{E}^2$. Además $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$.]

20.9 El índice de refracción del vidrio es 1,50. Calcular los ángulos de incidencia y de refracción cuando la luz reflejada por una superficie de vidrio está completamente polarizada.

20.10 En una cierta sustancia el ángulo crítico para ondas luminosas es de 45°. ¿Cuál es el ángulo de polarización?

20.11 (a) ¿A qué ángulo por encima de la horizontal debe estar el sol para que su luz reflejada por la superficie de un lago tranquilo esté completamente polarizada? (b) ¿Cuál es el plano del vector eléctrico de la luz reflejada?

20.12 Una onda luminosa polarizada linealmente y proveniente del aire incide según el ángulo de polarización en un medio de índice n. El vector eléctrico de la onda incidente yace en el plano de incidencia; su amplitud de oscilación es $\mathcal{E}_0$. Calcular (a) la intensidad de la onda incidente, (b) la amplitud $\mathcal{E}_0'$ de la onda reflejada y (c) la intensidad de la onda refractada. Comparar (a) con (c) y explicar el resultado.

20.13 Probar que para una onda electromagnética, $\mathbf{R}_\sigma$ es positivo si $n_{21} < 1$ y negativo si $n_{21} > 1$. Análogamente, probar que $\mathbf{R}_\pi$ es negativo (positivo) para ángulos de incidencia menores (mayores) que el ángulo de polarización cuando $n_{21} < 1$ y positivo (negativo) cuando $n_{21} > 1$.

20.14 Si una onda plana está polarizada linealmente con su campo eléctrico formando un ángulo α_i con el plano de incidencia, demostrar que en la onda reflejada y en la refractada el campo eléctrico forma con el mismo plano el ángulo

$$\operatorname{tg} \alpha_r = (\mathbf{T}_\sigma/\mathbf{T}_\pi) \operatorname{tg} \alpha_i$$

y

$$\operatorname{tg} \alpha_r' = (\mathbf{R}_\sigma/\mathbf{R}_\pi) \operatorname{tg} \alpha_i,$$

respectivamente.

20.15 Una onda luminosa en el aire, ($n = 1$), plana y polarizada linealmente, incide sobre una superficie de agua ($n = 1{,}33$). Determinar las amplitudes y fases de las ondas reflejada y refractada con respecto a las de la onda incidente para los casos siguientes:

Angulo de incidencia	Angulo entre el plano de incidencia y el plano del campo eléctrico
20°	0°
20°	90°
75°	0°
75°	90°

20.16 Una onda luminosa plana polarizada linealmente se origina en el agua ($n = 1{,}33$) y se refracta en la superficie de separación entre el agua y el aire ($n = 1$). Determinar las amplitudes y fases de las ondas refractada y reflejada respecto a las de la onda incidente, para los siguientes casos:

Angulo de incidencia	Angulo entre el plano de incidencia y el plano del campo eléctrico
20°	0°
20°	90°
40°	0°
40°	90°

20.17 Un haz de luz polarizada circularmente en el aire ($n = 1$) incide sobre una superficie de vidrio ($n = 1{,}52$) según un ángulo de 45°. Describir en detalle el estado de polarización de los haces reflejado y refractado.

20.18 Una placa de vidrio (índice n_v) está revestida de una película plástica delgada (índice n_r) (fig. 20-45). Desig-

nando por n_a el índice del aire, mostrar que para incidencia normal, el coeficiente de reflexión en la superficie de separación entre aire y revestimiento y entre éste y el vidrio son iguales si $n_r = \sqrt{n_v n_a}$. Hallar la relación entre los coeficientes cuando [illegible]ngulo de incidencia es 10° y n_v es 1.[illegible]2.

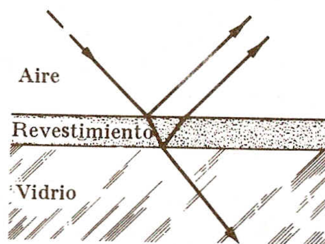


Figura 20-45

20.19 Considerar dos medios transparentes (1) y (2), separados por una superficie plana (fig. 20-46). Si **R** y **T** son los coeficientes de reflexión y de refracción para un rayo incidente en el medio (1), y **R'** y **T'** los mismos coeficientes cuando el rayo incide en el medio (2), probar que **T'T** = 1 — **R**² y **R** = — **R'**. Estas expresiones se llaman *relaciones de Stokes*. La segunda

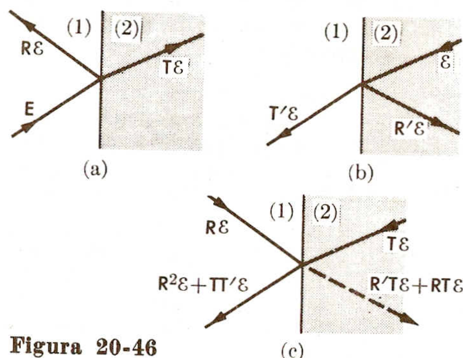


Figura 20-46

relación indica que los coeficientes de reflexión son de signo opuesto, y si para una de las reflexiones no hay cambio de fase, para la otra debe haber un cambio de fase igual π. [*Sugerencia:* Suponer que se invierte el sentido de los rayos **R**ℰ y **T**ℰ, como se muestra en la fig. 20-46(c) y tener en cuenta que en este caso el rayo final en el medio (1) debe ser ℰ y que no existe rayo final en el medio (2).]

20.20 Un polarizador y un analizador se orientan de modo que se transmite un máximo de luz. ¿A qué fracción de su valor máximo se reduce la intensidad de la luz transmitida cuando el analizador se rota los ángulos (a) 30°, (b) 45°, (c) 60°, (d) 90°, (e) 120°, (f) 135°, (g) 150°, (h) 180°? Hacer un gráfico de I/I_{max} para una vuelta completa del analizador.

20.21 Un haz paralelo de luz polarizada linealmente de longitud de onda 5,90 × 10^{-7} m (en el vacío) incide sobre un cristal de calcita como se indica en la fig. 20-26. Hallar las longitudes de onda de las ondas ordinaria y extraordinaria en el cristal. Hallar también la frecuencia de cada rayo.

20.22 Un haz de luz polarizada en un plano incide perpendicularmente sobre una placa de calcita (cuyos lados opuestos están cortados paralelamente al eje óptico) formando el vector eléctrico un ángulo de 60° con el eje óptico. Hallar el cociente de las amplitudes y de las intensidades de los haces ordinario y extraordinario.

20.23 Hallar el espesor de una placa de calcita necesario para producir un defasaje de (a) $\lambda/4$, (b) $\lambda/2$, (c) λ, entre los rayos ordinario y extraordinario, para una longitud de onda de 6 × 10^{-7} m.

20.24 ¿Cuál es el estado de polarización de la luz transmitida por una placa de cuarto de onda cuando el vector eléctrico de la luz incidente polarizada linealmente forma un ángulo de 30° con el eje óptico?

20.25 Un *compensador de Babinet* (figura 20-47) consiste en dos cuñas de

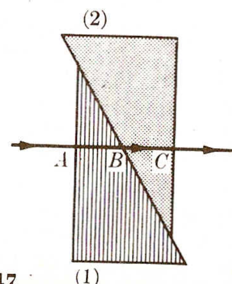


Figura 20-47

cuarzo que pueden deslizarse una sobre otra. Las cuñas están cortadas de tal modo que sus ejes ópticos son perpendiculares. Por consiguiente el rayo ordinario en una de ellas es el extraordinario en la otra. Demostrar que, para cualquier rayo, el defasaje es $\delta = (2\pi/\lambda)(n_1 - n_2)(e - e')$, donde $e = AB$ y $e' = BC$. Por lo tanto, si se desliza una cuña sobre la otra, se puede variar continuamente el defasaje.

20.26 En un compensador de Babinet, el ancho de una cuña es 2 mm. Hallar el ancho que la otra debe tener para que produzca un defasaje de $2\pi/3$ en una u otra dirección cuando se usa luz de longitud de onda 5,7 × 10^{-7} m.

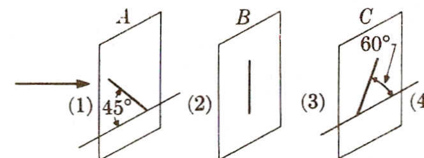


Figura 20-48

20.27 En la fig. 20-48, *A* y *C* son hojas de polaroide cuyas direcciones de transmisión se indican. *B* es una hoja de material birrefringente cuyo eje óptico es vertical. Las tres hojas son paralelas. Desde la izquierda entra luz no polarizada. Discutir el estado de polarización de la luz en los puntos (2), (3) y (4).

20.48 La fig. 20-49 representa un *prisma de Wollaston* hecho de dos prismas de cuarzo pegados entre sí. El eje óptico del prisma de la derecha es perpendicular a la página, mientras que el del lado izquierdo es paralelo a la misma. La luz incidente es normal a la superficie y da lugar a los rayos ordinario y extraordinario que viajan en el prisma de la izquierda según la misma trayectoria, pero con diferentes velocidades. Copiar la fig. 20-49 y mostrar sobre ese diagrama cómo se deflectan los rayos ordinario y extraordinario al atravesar el prisma de la derecha y también al salir al aire.

20.29 La onda descrita en el problema 19.4 incide perpendicularmente sobre un polarizador, el cual rota en su plano hasta que la intensidad transmitida es máxima. (a) ¿En qué dirección yace el eje de transmisión del polarizador? (b) ¿En qué dirección yace el eje de transmisión cuando la luz transmitida es mínima? (c) Calcular el cociente de las intensidades transmitidas para las posiciones encontradas en (a) y (b).

20.30 Un haz de luz blanca polarizada linealmente incide perpendicularmente sobre una placa de cuarzo de espesor 0,865 mm, cortada paralelamente al eje óptico. El plano del campo eléctrico forma un ángulo de 45° con el eje de la placa. Los índices principales de refracción del cuarzo para la luz del sodio están en la tabla 20-2. Despreciar la variación de $n_1 - n_2$ con la longitud de onda. (a) ¿Cuáles longitudes de onda comprendidas entre 6,0 × 10^{-7} m y 7,0 × 10^{-7} m emergen de la placa polarizadas linealmente? (b) ¿Cuáles longitudes de onda circularmente polarizadas emergen? (c) Suponer que el haz emergente pasa a través de un analizador cuyo eje de transmisión es perpendicular al plano de vibración de la luz incidente. ¿Qué longitudes de onda faltan en el haz transmitido?

20.31 Un haz de luz, después de pasar a través de un prisma de Nicol N_1,

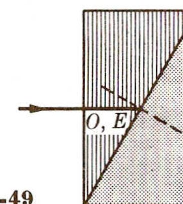


Figura 20-49

atraviesa una celda que contiene un medio difusor. Se observa la celda en ángulo recto por medio de otro prisma de Nicol N_2. Originalmente, los prismas de Nicol se orientan hasta que el brillo del campo sea máximo. (a) ¿Se produce extinción cuando se rota el prisma N_2 en 90°? (b) Se rota ahora el prisma N_1 en 90°, ¿es brillante u oscuro el campo a través de N_2? (c) Se restaura el prisma N_2 a su posición original. ¿Es brillante u oscuro el campo visto a través de N_2?

20.32 Se sabe experimentalmente que por cada gramo de azúcar disuelto en

1 cm³ de agua, el plano de polarización de una onda electromagnética polarizada linealmente rota $+ 66{,}5°$ por cada cm de camino. Un tubo de 30 cm de largo contiene una solución de azúcar que contiene 15 gramos de ésta en 100 cm³ de solución. Hallar el ángulo de rotación de la luz polarizada.

20.33 Hallar la cantidad de azúcar contenida en un tubo cilíndrico de 30 cm de longitud y 2 cm² de sección transversal si el plano de polarización rota 39,7°. [*Sugerencia:* ver el problema precedente.]

20.34 Estimar la profundidad de penetración en el cobre de una onda electromagnética cuando su amplitud disminuye hasta $1/e$ de su valor en la superficie, si la frecuencia es (a) en la región de las microondas, 6×10^9 Hz, (b) en la región visible, 6×10^{14} Hz, (c) en la región de los rayos X, 3×10^{18} Hz. Suponer que $\mu \approx \mu_0$.

20.35 El índice de refracción del aire es $n = 1 + 0{,}00024\rho$, donde ρ es la densidad del aire (en kg mr^{-3}). Sea θ el ángulo zenital verdadero de una estrella y $\theta - \Delta\theta$ el ángulo zenital aparente respecto a un observador que mira la estrella a través de la atmófera (figura 20-50). (a) Escribir la ecuación que da $\Delta\theta$ en función del ángulo zenital verdadero, de la densidad ρ, de la presión atmosférica p y de la temperatura absoluta T. Calcular $\Delta\theta$ al nivel del mar para una estrella con $\theta = 45°$ suponiendo una temperatura $T = 298°$ K (25° C).

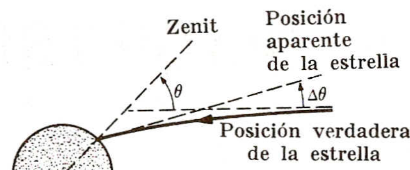


Figura 20-50

20.36 Un medio no homogéneo estratificado tiene un índice de refracción que varía según la dirección Y, esto es $n = n(y)$. Demostrar que la ecuación del camino de un rayo, que satisface la ec. (20.32), es

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} dy/\sqrt{n^2(y)/C^2 - 1}.$$

20.37 La trayectoria de un rayo en un medio no homogéneo está representada por $x = A \operatorname{sen}(y/B)$. Calcular el índice de refracción n en el espacio entre los planos $x = A$ y $x = -A$, suponiendo que depende sólo de x y que tiene el valor n_0 para $x = 0$.

20.38 El índice de refracción de un cierto medio está dado por $n = h + kx$. Calcular la trayectoria del rayo que pasa por el origen de los ejes coordenados y forma en este punto un ángulo ϕ_0 con el eje X. Hacer el gráfico de la trayectoria del rayo, suponiendo que $h = 1$, $k = 1$, y $\phi_0' = 45°$.